

ERGÄNZUNG DES KAPITELS TURBULENTE KANAL- UND GRENZSCHICHTSTRÖMUNGEN ⁺⁾

VON

WERNER ALBRING

DRESDEN 2006

⁺⁾ für das Lehrbuch „Angewandte Strömungslehre“ [14] .Es werden zeitgemittelte Geschwindigkeitsprofile vorgestellt.

Inhaltsverzeichnis

1	Begriffsbildung und Historie	3
2	Ludwig Prandtls Pionierarbeit	5
3	Berechnung der Turbulenz mit strukturierten Wirbelfeldern	9
4	Das Beschreiben von Reibungsschichten mit Kompaktprofilen	10
4.1	Die spezialisierte strömungsmechanische Gleichung der unbeschleunigten Grundströmung	10
4.2	Errechnen von kompakten Geschwindigkeitsprofilen	12
5	Das Zweiparabel-Profil	13
6	Bei Turbulenz mindern parasitäre Wirbel die fluide Transportarbeit gegenüber der laminaren Strömung	18
7	Die Verbindung des Anstieges der Geschwindigkeit an der Wand mit der Reynoldszahl Re bei der Kanalströmung	20
7.1	Eine Verbindung zum Widerstandsbeiwert	21
7.2	Über den Zusammenhang des Geschwindigkeitsanstieges an der Wand C'_0 und Reynoldszahl bei Grenzschichten	21
8	Die Hagenzahl einer Kanalströmung	24
8.1	Beispiele	24
9	Das Umformen von Geschwindigkeitsprofilen der Kanalströmung in Geschwindigkeitsprofile von Grenzschichten	25
10	Entwicklung von Dreischichten-Profilen	26
10.1	Das Dreischichtenprofil für die Kanalströmung	28
10.2	Geschwindigkeitsprofile von ebenen turbulenten Grenzschichten.	31
10.3	Das Ablöseproblem	34
11	Literatur	37

Begriffsbildung und Historie

Was bedeutet das Wort Turbulenz? Während langer Zeiten hatten auch kompetente Fachleute der Strömungsmechanik keine tief begründete physikalische Definition formuliert. Noch im Jahr 1959 beklagte der Niederländer O. Hinze in seinem damals publizierten Turbulenz- Buch, dass sich in der Vergangenheit die bedeutendsten Kenner turbulenter Strömungen nicht bemüht hatten, den Elementarprozess der Turbulenz zu definieren, nur von zeitlich unregelmäßigen Strömungen war geschrieben worden. Also zeigte sich wieder einmal, dass Unbekanntes eher benannt als ergründet wird, ganz so wie Goethe es den Mephisto im Drama hat sprechen lassen: „Man soll sich nicht zu ängstlich quälen, denn eben wo Begriffe fehlen, da stellt sogleich ein Wort sich ein“.

Vielleicht hat ein Philologe im Bedeutungswörterbuch von Duden nachgeschaut, und unter dem Adjektiv "turbulent" folgende Erklärung gelesen: Durch allgemeine Aufregung, Erregung, wildes Durcheinander gekennzeichneter Zustand. Das Substantiv Turbulenz ist in der deutschen Sprache seit dem 17. Jahrhundert nachgewiesen, es ist hergeleitet aus dem lateinischen Eigenschaftswort turbulentus, es bedeutet: unruhig, bewegt, stürmisch und aus dem Hauptwort turbo, es bezeichnet Wirbel, Sturm und Kreisel. Die Journalisten verwenden das Wort Turbulenz im Plural, sie sprechen von Turbulenzen, um ein chaotisches Durcheinander zu benennen. Der Strömungsmechaniker jedoch gebraucht das Wort nur im Singular, damit benennt er eine Strömung mit einer Vielzahl von Wirbeln. Und die tiefer dringende Frage der Fachleute heißt: Wie kommt in der Natur und bei technischen Geräten dieser Strömungstyp zu Stande, der höheren Widerstand und größere Verluste gegenüber einer auch möglichen wirbelfreien laminar, geschichteten Strömung bewirkt?

Auf eine Kernfrage: Welche Auswirkungen hat die Turbulenz, wie beeinflusst sie die natürliche Umgebung kann man antworten: Gäbe es in der Natur kein turbulentes, die kinetische Energie eines Hauptstromes milderndes Verwirbeln, dann sähe unsere Umgebung anders aus: Die Geschwindigkeit eines Baches oder Flusses würde bei gleichem geodätischen Gefälle um ein Vielfaches größer sein. Der Wetterablauf würde beeinflusst, es könnten bei gleich groß gebliebener Druckdifferenz zwischen dem meteorologischen Hoch- und dem Tiefdruckgebiet ganz entsetzliche und sehr lange andauernde Orkane mit außerordentlich großen nie erlebten Windgeschwindigkeiten wüten. Jedoch die den Boden erodierende Schubspannung, also auch die von Bach und Fluss, würde bei Laminarität trotz gesteigerter Geschwindigkeit nicht größer sein als beim Wirken von Turbulenz.. Doch zu aller Beruhigung, derartig vollständiges Verschwinden turbulenter Wirbel wird sich in der Natur nicht einstellen.

Und welchen Anteil nimmt die Mathematik beim forschenden Erkunden, beim Prozess des gedanklichen Durchdringens, des Erklärens und Definierens?

Wir antworten: Erst wenn ein physikalisch begründeter Ansatz des Elementarablaufs im differentiell Kleinen bekannt geworden ist, kann die Mathematik sinnvoll eingesetzt werden und mit der Integration kann Aufschluss über das Strömungsverhalten in Raum und Zeit gewonnen werden.

Früheste Kunde von experimentellen Untersuchungen turbulenter Strömungen haben wir über französische Bauingenieure erhalten [1], die um die Zeit der französischen Revolution von 1789 lebten. Sie hatten den Reibungswiderstand durchströmter Rohre, die zur Stadtbewässerung dienen, gemessen, mit dem Ziel, die notwendige Pumpenleistung vorauszuberechnen. Dubeniat bemerkte 1786, dass der Widerstand nicht genau proportional zum Geschwindigkeitsquadrat verläuft, und 1791 präziserte Woltmann, dass der Widerstand der Geschwindigkeitspotenz $7/4$ folgt [1]. Der deutsche Bauingenieur Gotthilf Hagen, er lebte von 1797 bis 1884, entdeckte die unterschiedlichen Strömungsformen laminar und turbulent.

Hagen hat im Jahr 1839, vier Jahre vor Poiseuille (1843), die Größe des Druckabfalls für laminare Strömung in Rohren gemessen und publiziert, und er hat schon im Jahr 1841 beim Experimentieren mit modellmäßig verkleinerten Rohren eine Grenze von Geschwindigkeit und Durchmesser entdeckt, unterhalb der das Wasser laminar, oberhalb aber turbulent strömt. Er hatte dem Wasser feine Sägespäne zugesetzt, wandparalleles Bewegungen bei Laminarität und starkes Verwirbeln bei Turbulenz beobachtet. Das alles hatte er schon mehr als 40 Jahre vor

dem englischen Hochschullehrer Osborne Reynolds getan, dem wahrscheinlich Hagens Publikation nicht bekannt gewesen war. Hingegen hatte sich die Nachricht über die Versuche Reynolds weit und schnell verbreitet. Auch dieser Forscher hatte mit wasserdurchströmten Glasrohren experimentiert und gezeigt, dass ein zentral eingeführter flüssiger Farbfaden bei Laminarität auf langem Weg unvermischt bleibt, sich hingegen bei Turbulenz auf kurzem Weg schnell mit dem umgebenden Wasser mischt. Reynolds besondere Leistung besteht im Entdecken der Ähnlichkeitskennzahl für die Grenze von laminar zu turbulent, gebildet aus dem Produkt von Geschwindigkeit und Rohr- Durchmesser, dividiert durch die kinematische Zähigkeit, später kritische Reynoldszahl genannt, vorgeschlagen von Arnold Sommerfeld. Zu Beginn des 20. Jahrhunderts, hatten sich neben den Interessenten aus dem Wasserbau auch Ingenieure des Schiffbaus und der Luftfahrt bei den Strömungsmechanikern gemeldet; sie wollten Methoden kennen lernen, um von der Strömung verursachte Kräfte und Momente sowie den Reibungswiderstand von Schiffen, Luftschiffen und Flugzeugen vorauszuberechnen. Viele dieser Problemstellungen löste der genial begabte Ludwig Prandtl (1875 bis 1953), der schon von seinen Zeitgenossen als Vater der Strömungslehre benannt worden war. Um den Reibungswiderstand voraus zu bestimmen, mussten die Strömungsmechaniker Geschwindigkeitsprofile in der körpernahen Reibungsschicht, Grenzschicht genannt, ermitteln. Pionierarbeit zur laminaren Grenzschicht leisteten Ludwig Prandtl (1904), der an der Universität Göttingen arbeitete und sein Doktorand Blasius. Später hatte Blasius (1913) in der Berliner Wasserbauversuchsanstalt den turbulenten Widerstandsbeiwert wasserdurchströmter Rohre im Abhängen von der Reynoldszahl gemessen [2]. Er hatte auch festgestellt, dass der Druck proportional zur Potenz $7/4$ abfällt, das übereinstimmend mit dem 122 Jahre zuvor erbrachten Ergebnis von Woltmann, dessen Publikation Blasius vermutlich nicht gekannt hat. Die Messungen von Blasius sind für die ganze Strömungsmechanik des 20. Jahrhunderts wichtig geblieben, denn das Resultat hat sich auf Grenzschichten umrechnen lassen. Bemerkenswerte Beiträge zum Turbulenzproblem hatte der schwedische Meteorologe C. W. Oseen [20] schon im Jahr 1930 und der Deutsche L. Hopf [21, 22] 1919 geliefert¹.

Nun zur Historie des turbulenten Geschwindigkeitsprofils im Kanal und in der Grenzschicht: Prandtl hatte den Vorschlag des französischen Forschers Boussinesq aufgegriffen, eine vergrößerte Zähigkeit zu postulieren. Er überlegte: Die kinematische Wirbelzähigkeit führt die Dimension $[m^2/s]$, sie müsste als Produkt einer Mischgeschwindigkeit und einer Mischungslänge aufgefasst werden. Prandtl setzte als Mischgeschwindigkeit das Produkt aus Geschwindigkeitsanstieg und Wegelement an. Die Mischungslänge interpretierte er als Länge des Weges, auf dem sich ein Teilchen mit der Umgebung vermischt. Das Einsetzen dieser Zähigkeit in Newtons Reibungsformel führt zu einer Verbindung von Schubspannung und Geschwindigkeitsanstieg. Unbekannt blieb, in welcher Beziehung die Mischungslänge zu anderen Strömungsparametern steht. Diesen Erkenntnisstand hatte Prandtl 1925 erreicht. [3]. Erst fünf Jahre später glaubte Prandtls früherer Mitarbeiter Theodor von Karman eine Lösung gefunden zu haben. Er setzte die Mischungslänge proportional zum Quotienten aus erster und zweiter Geschwindigkeitsableitung nach der Koordinate senkrecht zur Wand. Das Integral führt zu einer Geschwindigkeit, die vom Logarithmus des Wandabstandes abhängt. Brauchbar ist seine Lösung nur im wandfernen Gebiet, sie versagt in unmittelbarer Wandnähe, dort wird eine besondere laminare Unterschicht angestückelt. Prandtl [4] publizierte drei Jahre nach Karmans Vortrag eine eigene, stark vereinfachte Integration. Er setzt die tatsächlich vom Wandabstand abhängende Schubspannung mittellnd als eine unveränderlich bleibende Größe an, er setzt die Mischungslänge proportional zum Wandabstand. Als Integral ergibt sich ebenfalls logarithmisches Abhängen der Geschwindigkeit vom Wandabstand. Auch diese Gleichung versagt in unmittelbarer Wandnähe, wieder muss eine laminare Unterschicht hinzugefügt werden. Doch als Gebrauchsformel hat sich Prandtls Lösung während des ganzen restlichen 20. Jahrhunderts erhalten, sie genügte allen

¹ Der Autor verdankt Herrn Dr.-Ing. habil. Gerhard Grunwald den Hinweis auf diese frühen Beiträge von Bearbeitern außerhalb des Göttinger Arbeitskreises um Prandtl.

technischen Anwendern, sie wurde an den technischen Bildungsanstalten unverändert in den Lehrveranstaltungen vorgetragen.

Doch die Frage nach dem elementaren Ablaufen der Turbulenz war ein Thema der strömungsmechanischen Forschung geblieben, denn noch fehlten physikalisch begründete Ansätze. Prandtl hatte schon in einer Schrift aus dem Jahr 1921 beklagt, dass die Physiker das Turbulenzgebiet stiefmütterlich behandelten. Zwar hatte sich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts noch ein bedeutender Physiker der Aufgabe gestellt, nämlich Arnold Sommerfeld. Er bewertete in einem Buch (1944) das Turbulenzerkunden als schwierigstes Problem der Strömungsmechanik. Damals war noch umstritten, ob überhaupt die Navier- Stokes -Gleichung zum Errechnen zuständig sei, Sommerfeld erklärte sich zwar von der Zuständigkeit überzeugt, er schrieb aber, dass hervorragende Fachvertreter wie Karman und Taylor sein Einschätzen für falsch hielten, sie vermuteten, dass der Turbulenz nicht mit Differentialgleichungen, sondern nur mit der Statistik beizukommen sei, ähnlich wie es schon bei der Gastheorie geschehen war. Diese Meinung teilte in der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts die Majorität der Strömungsmechaniker. Auch muss man bedenken, dass etwa bis zur Jahrhundertmitte nur Integrale von Naviers und Prandtls Differentialgleichungen für laminares Strömen vorgewiesen werden konnten.

Heute ist festzustellen, dass die Zuständigkeit von Naviers Gleichung für die Turbulenz nicht mehr bezweifelt wird, dazu trugen nicht zuletzt die direkten Computerintegrationen der Navier-Stokes-Gleichung für turbulente Strömungen bei.

An der Technischen Universität Dresden war das Problem durch J. Stiller [9] bearbeitet worden.

Schließlich wurden die Elementarbewegungen von Wirbeln ergründet [11]. Daraus hat der Verfasser ein Turbulenzkriterium formuliert:

Turbulenz ist vorhanden, wenn bei periodischer Bewegung in der Differential- Gleichung von Rayleigh der nichtlineare Summand von Null verschieden bleibt.

Weitere Arbeiten beschäftigten sich mit der Entwicklung turbulenter Geschwindigkeitsprofile. Dieser Aufgabe ist der nachfolgende Text gewidmet.

1 Ludwig Prandtls Pionierarbeit

Zum Errechnen turbulenter Reibungsschichten war Prandtl von Newtons Reibungsgesetz ausgegangen. Die Schubspannung τ entspricht dem Produkt aus dem Geschwindigkeitsgradienten senkrecht zur Strömungsrichtung und der fluiden Zähigkeit. Gleichung (A 1).

Tafel A

$$\tau = \nu \cdot \rho \cdot \frac{dc_x}{dy} = \nu \cdot \rho \cdot \frac{dC}{dY} \cdot \frac{c_{max}}{h}$$

$$\tau_{Wand} = \nu \cdot \rho \cdot C_0' \cdot c_{max} / h \quad (A 1)$$

mit

$$Re = \frac{c_{mittel} \cdot 4h}{\nu}$$

wird

$$\frac{\tau}{\rho \cdot c_{mittel}^2} = \frac{4 \cdot c_{max}}{Re \cdot c_{mittel}} \cdot \frac{dC}{dY} \quad (A 2)$$

Es bedeutet

$$C_0' = \left[\frac{dC}{dY} \right]_{Y=0}$$

der dimensionslose Anstieg der Schubspannung an der Wand.

$$\frac{\tau_{Wand}}{\rho \cdot c_{mittel}^2} = \frac{4}{Re} \cdot \frac{c_{max}}{c_{mittel}} \cdot C_0' \quad (A 3)$$

$$\frac{\tau}{\tau_{Wand}} = \frac{1}{C_0'} \cdot \frac{dC}{dY} \quad (A 4)$$

$$v_e \sim y^2 \cdot \frac{dc_x}{dy} \quad (A 5)$$

$$\frac{\tau}{\rho} = K \cdot y^2 \cdot \left(\frac{dc_x}{dy} \right)^2 \quad (A 6)$$

$$\frac{c_x}{\sqrt{\tau_w / \rho}} = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot \ln \frac{y \cdot \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} + Konst. \quad (A 7)$$

$$\frac{c_x}{\sqrt{\tau_w / \rho}} = \frac{\sqrt{\tau_w / \rho} \cdot y}{\nu} \quad (A 8)$$

$$C_0' = \frac{h \cdot \sqrt{\tau_{wand} / \rho}}{\nu} \cdot \frac{\sqrt{\tau_{wand} / \rho}}{c_x} \quad (A 9)$$

$$C = Y^{1/7} \quad (A 10)$$

Die Gleichung (A.1) wird zum dimensionslosen Ausdruck (A.2) umgeformt. Als dimensionslose Wandschubspannung ist (A 3) geschrieben. Aus (A 2) und (A.3) bildet man das Schubspannungsverhältnis (A 4). Prandtl hat nach Vorschlag von Boussinesq für Turbulenz eine besondere Zähigkeit eingeführt, er nannte sie *Wirbelzähigkeit*. Er schrieb (A 5), setzte das in (A 1) ein, und erhielt (A 6). K bedeutet einen Proportionalitätsfaktor. Weiterhin ließ Prandtl im ganzen Bereich der Koordinate y, also in Richtung quer zur Strömung, die Schubspannung unverändert gleich groß, er ersetzte die tatsächliche Abhängigkeit von y durch einen Festwert. Damit ist (A 6) leicht integrierbar geworden mit dem Ergebnis (A 7). Den Kehrwert aus der Wurzel von K, also $1/\sqrt{K}$, setzte er gleich 2,5 und die Integrationskonstante gleich 5,5 beides als Anpassung an Messungen.

Aus (A 7) lassen sich Einschränkungen des Gültigkeitsbereiches erkennen: Ausgeschlossen werden muss das wandnahe Gebiet um $y = 0$, es wird durch eine laminare Unterschicht ersetzt. (A 8). Aus dieser Gleichung und aus (A 3) lässt sich für den später [10] eingeführten dimensionslos gemachten Geschwindigkeitsanstieg an der Wand C_0' die Gleichung (A 9) folgern. Prandtl gelang es, mit dem Auftragen von

$$c_x / \sqrt{\tau / \rho} = f \left(\ln \frac{y \cdot \sqrt{\tau / \rho}}{\nu} \right)$$

ein weit reichend anwendbares Diagramm zu schaffen, das in der Ingenieurpraxis sowohl für die Kanalströmung als auch für die Grenzschichten benutzt wurde. (Abbildung 1)

Die Gleichung (A.9) gilt als Quotient von $c_{x\max} / \sqrt{\tau/\rho}$ und zugehörigem $\frac{h \cdot \sqrt{\tau/\rho}}{\nu}$ - (das sind die Endkoordinaten des Geschwindigkeitsprofils mit $y = h$ in Prandtl's Darstellung von Gleichung (A 7)). Dieser Quotient entspricht dem dimensionslosen Anstieg der Geschwindigkeit C'_0 an der Wand bei $y = 0$.

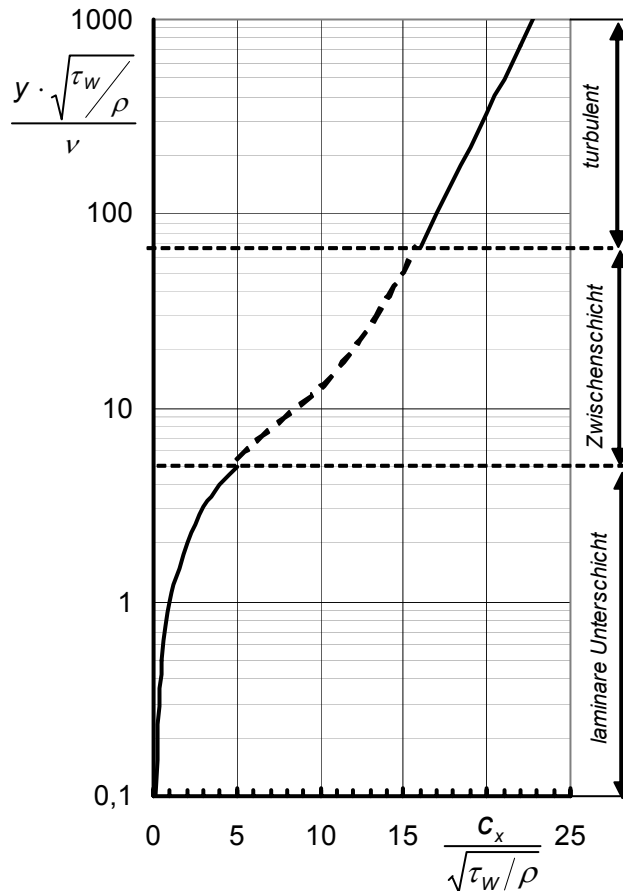


Abbildung 1 *Prandtl's weit reichend anwendbares Geschwindigkeitsprofil mit turbulentem und laminarem Gebiet (kräftig gezeichnet), beide Einzel- Profile sind durch die gestrichelt gezeichnete Übergangsschicht verbunden.*

Im Bereich der Ordinate von Abbildung 1, zwischen den Zahlenwerten 70 und 10^3 , liegt das von Prandtl als „voll ausgebildeter Turbulenz“ bezeichnete Gebiet. Weiterhin kann man aus dem Produkt der End- Koordinatenwerte eine Reynoldszahl und, nach Multiplikation mit dem Faktor 4 (um den Bedingungen der Ähnlichkeitsmechanik zu genügen), eine spezielle Reynoldszahl Re errechnen, die auf die Größtgeschwindigkeit des Profils bezogen ist.

In Abbildung 2 wurden diese Re-Zahl und der Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand C'_0 über der Prandtlischen Geschwindigkeitskoordinate aufgetragen.

Das nach (A.7) und (A.8) errechnete Geschwindigkeits- Profil erfüllt jedoch nur wenige der Randbedingungen, die an Geschwindigkeitsprofile von Grenzschichten gestellt werden, nämlich

bei $y = 0$ werden $c_x = 0$ und $dc_x / dy = C'_0 \cdot c_{x_{max}} / h$;

bei $y = h$ gilt $c_x = c_{max}$.

Das Profil verletzt die Bedingung, dass in Kanalmitte oder am oberen Grenzschichtrand der Geschwindigkeitsanstieg Null betragen sollte.

Im Anfang der Turbulenzforschung hatte Prandtl die Gleichung (A. 10) als ein durch Auswerten und Umrechnen der Messungen von Blasius gefundenes Geschwindigkeitsprofil benutzt, das so genannte „Ein Siebentel Potenz- Profil “ [3]. Dieses Geschwindigkeitsprofil (A 10) verletzt wesentliche Randbedingungen. Bei $y = 0$ wird der Geschwindigkeitsanstieg unendlich groß und bei $y = 1$ wird er nicht Null sondern erreicht den Wert $1/7$.

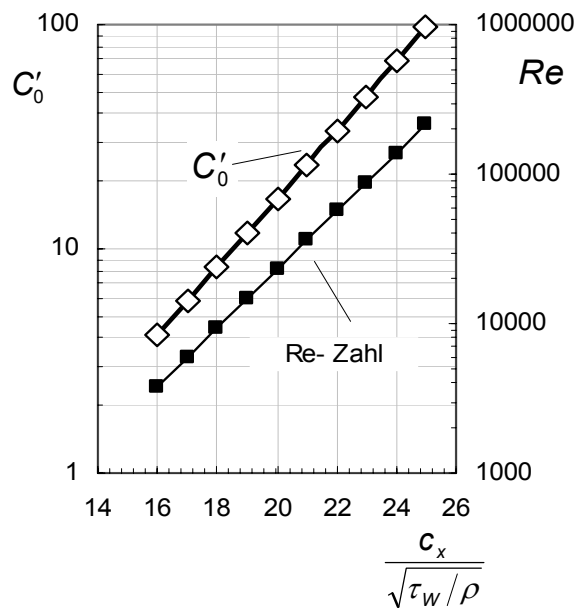


Abbildung 2: *Re-Zahl und der Wandanstieg über der Prandtlischen Geschwindigkeitskoordinate*

2 Berechnung der Turbulenz mit strukturierten Wirbelfeldern

Beim statistischen Mitteln des Turbulenz- Ablaufs verzichtet der Bearbeiter darauf, gedanklich die mechanische Kausalitäten- Reihe freizulegen, beginnend im elementar Kleinen mit Wirbeln, bis weiter zur Bildung eines Geschwindigkeitsprofils im Hauptstrom. Gerade das aber war im 7. und 8. Jahrzehnt des zwanzigsten Jahrhunderts eine Zielstellung der an der Technischen Universität Dresden schaffenden Strömungsmechaniker gewesen. Deren bis zum Jahr 1979 erreichte Ergebnisse sind in einer Monographie [11] niedergeschrieben. Für Wirbelfelder war der Geschwindigkeitsverlauf als exakte Lösung von Naviers Gleichung von Ort und Zeit errechnet worden. Innerhalb von Systemen kleiner und kleinster Wirbel wird, wegen großer Geschwindigkeitsgradienten, der Arbeitsverbrauch durch Reibung besonders groß.

Aber bald wandte der bedeutende russische Turbulenzforscher Loitsianski ein, er war Vertreter der statistischen Arbeitsweise, das Arbeiten mit strukturierten Wirbelfeldern könne als Ergebnis der Rechnung nur laminare Lösungen liefern. Wissenschaftliche Kritik kann förderlich sein, denn beim Bedenken des Einwandes wurde ein mathematisch scharf selektierendes Turbulenzkriterium gefunden [11]:

Turbulenz ist in Wirbelsystemen vorhanden, wenn in der Differentialgleichung von Rayleigh, bei periodischer Bewegung, in zeitlicher Mittelbildung der nichtlineare Summand aus der Wirbelbewegung erhalten bleibt.

Überlagerte elementare Wirbelfelder bleiben laminar, wenn Stromlinien und Linien gleicher Drehung deckungsgleich verlaufen. Ist das nicht der Fall, dann können überlagerte Felder im zeitlichen Mittel beständig bleiben, Energie fließt ihnen von der Hauptströmung zu, es herrscht Turbulenz. Die starken Geschwindigkeitsgradienten innerhalb von Wirbelfeldern verursachen große Reibungsarbeit, damit verbunden ist der Verbrauch eines Großteils verfügbarer Energie, der verbleibende Anteil zur Transportarbeit des Hauptstroms im Kanal wird erheblich gemindert.

Man trennt die Strömung zum Berechnen in einen zeitbeständigen Anteil, für ihn ist die Rayleigh- Differentialgleichung zuständig, und in einen zeitveränderlichen Anteil, der mit einer nichtlinearen Sommerfeld-Gleichung bearbeitet wird. [11]. In der Rayleigh- Gleichung erscheint ein zusätzliches Trägheitsglied, und die nichtlineare Sommerfeld- Gleichung spaltet Wirbelsysteme in weitere Systeme auf. In keiner der Differentialgleichungen darf der Reibungssummand gestrichen werden. Die Rechnung liefert ein Spektrum von Wirbelfeldern mit größeren und kleineren Wellenzahlen von geringerer Intensität als die Ausgangsfelder. Das Wirbelsystem ist vergleichbar mit dem analogen System von akustischen Kombinationstönen, das Helmholtz beschrieben hat.

Mit laminaren Wirbelfelder hatte E. Strehle gearbeitet [6]. Zum Errechnen zeitgemittelter Geschwindigkeitsprofile wird das Zeitmittel des Verwirbelns gebildet.

G. Schindler erarbeitete ein neues Verfahren. Ausgehend von Wirbelsystemen errechnete er das turbulente Geschwindigkeitsprofil für die Kanalströmung [7]. Die Brüder Fritz und Franz Detsch wandten die Wirbelfelder auf akustische Problemstellungen an [8]. Mit Wirbelfeldern als akustisches Quellgebiet errechneten sie strömungsmechanisch alle akustischen Singularitäten, die der Engländer Lighthill in Analogie zur Elektrodynamik nur postuliert hatte.

Die Dresdener hatten weiterhin in einer von Hans Joachim Maschek geführten Arbeitsgruppe aufmerksam die Fortschritte der Statistiker beim Bearbeiten des Turbulenzphänomens verfolgt und dazu eigene Beiträge geleistet; Maschek war einer der ersten, der Programme für Rechenautomaten zur Turbulenz erarbeitete.

Erst später, zu Ende der neunziger Jahre, hatte sich der Verfasser dem Errechnen turbulenter Geschwindigkeitsprofile einer Kanalströmung zugewandt um, anfangs noch auf dem von Boussinesq gewiesenen Weg, nach einer vom Wandabstand abhängenden Zähigkeitsfunktion zu suchen.

Beim Neubearbeiten der turbulenten Kanalströmung wurde jedoch von der Differentialgleichung für das Kraftgleichgewicht ausgegangen, nicht mehr, wie es Prandtl getan hatte, von Newtons Reibungsformel.

Nachdem das Neuentwickeln von Geschwindigkeitsprofilen gegenüber dem Stand von 1933 eingesetzt hatte, wurde 1997 als erstes das **Kompaktprofil I** vorgestellt. [12] Das ist ein Profil, das schon im gesamten Strömungsbereich zwischen $Y = 0$ und $Y = 1$ gilt. Es braucht keine laminare Unterschicht in Wandnähe hinzugefügt werden.

Beim weiter entwickelten **Kompakt-Profil II** verschwindet die erste Ableitung der Zähigkeit in Kanalmitte.

Beim **Kompakt-Profil III** wird in Kanalmitte die Zähigkeit $\nu_e = \nu$.

In einem weiteren Schritt wurde ein **Zweiparabel-Profil** entwickelt. [18]

Schließlich wurde ein **Dreischichten-Profil** gefunden, das auch die Randbedingungen beim Beschleunigen und Verzögern berücksichtigt. [16]

3 Das Beschreiben von Reibungsschichten mit Kompaktprofilen

Es war nötig geworden, zum Berechnen des Verlaufes der zeitgemittelten Hauptgeschwindigkeitsprofils turbulenter Strömungen nicht primär von Newtons Reibungsgesetz auszugehen, sondern mit der strömungsmechanischen Differentialgleichung zu operieren. In Folgendem wird eine strömungsmechanische Gleichung für den unbeschleunigten Parallelstrom hergeleitet; sodann das Errechnen von Geschwindigkeitsprofilen weiter geführt, und eine Rechnung vorgestellt, die den Energieverbrauch durch Wirbel mit dem Verändern des Geschwindigkeitsprofils von Laminarität zur Turbulenz verbindet.

3.1 Die spezialisierte strömungsmechanische Gleichung der unbeschleunigten Grundströmung

Bei der ebenen Strömung zwischen zwei parallelen, geraden Wänden, *Kanalströmung* genannt, wird der Beschleunigungssummand aus Naviers Gleichung gestrichen. Es bleibt die Gleichung (B 1), das Gleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskraft anzeigend. Das negative Vorzeichen von dp/dx berücksichtigt den Druckabfall in Strömungsrichtung. In unmittelbarer Wandnähe wird die im Außenfeld vergrößerte Zähigkeit ν_e zum Normalwert ν zurückgebildet, es gilt dort also $\nu_e = \nu$. Man schreibt für die Kanalströmung im Wandbereich (B 2) und, nach weiterem Differenzieren, (B 3). Mit Anwenden der Hagenzahl (B 4) wird aus (B 2) der Zusammenhang (B 5) gefolgert, das Charakteristikum der Kanalströmung. Es werden dimensionslose Größen entsprechend (B 6) benutzt. Das Integrieren von (B 1) führt zu (B 7). An der Wand, bei $y = 0$, geht also ν_e in ν über. Daraus lässt sich (B 8) für die Größe der Konstanten folgern. Die linke Seite der Gleichung (B 7) ist nach dem Impulssatz durch (B 9) ersetzbar. Das führt in (B 7) und in (B 8) verwendet über (B 9a) zu (B 10), und etwas umgeordnet zu (B 11). Das ist die strömungsmechanische Gleichung der unbeschleunigten Parallelströmung. Für das Verhältnis von effektiver Zähigkeit zur molekularen Zähigkeit wird (B 12) angesetzt. Mit $a = b = 0$ führt die Integration von (B 11) zum laminaren Profil (B 13).

Tafel B

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\nu_e \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) \quad (\text{B 1})$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \cdot \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \quad (\text{B 2})$$

$$\frac{\partial^3 c_x}{\partial y^3} = 0 \quad (\text{B 3})$$

$$Ha^* = -\frac{h^2 \cdot \partial p / \partial x}{c_{\text{mittel}} \cdot \nu \cdot \rho_{Y=0}} \quad (\text{B 4})$$

$$Ha^* = -\left(\frac{\partial^2 C}{\partial Y^2} \right)_{Y=0} \quad (\text{B 5})$$

$$C = c_x / c_{x \text{ max}} \quad (\text{B 6})$$

$$Y = y / h$$

$$C'_0 = (dC / dY)_{Y=0}$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot y = \nu_e \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + \text{Konst.} \quad (\text{B 7})$$

$$\text{Konst.} = -\nu \cdot (dc_x / dy)_{y=0} \quad (\text{B 8})$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\tau_{\text{Wand}}}{\rho \cdot h} = \frac{\nu \cdot (dc_x / dy)_{y=0}}{h} = \nu \cdot c_{x \text{ max}} \cdot C'_0 / h^2 \quad (\text{B 9})$$

$$-\nu \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{x \text{ max}} \cdot y}{h^2} = \nu_e \cdot \frac{dC}{dY} \cdot \frac{c_{x \text{ max}}}{h} - C'_0 \cdot \frac{c_{x \text{ max}}}{h} \quad (\text{B 9a})$$

$$-C'_0 \cdot Y = \nu_e / \nu \cdot \frac{dC}{dY} - C'_0 \quad (\text{B 10})$$

$$\boxed{\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} = \frac{1-Y}{\nu_e / \nu}} \quad (\text{B 11})$$

$$\nu_e / \nu = 1 + a \cdot Y + b \cdot Y^2 \quad (\text{B 12})$$

$\nu_e / \nu = 1$ bedeutet Laminarität mit

$$C = 2 \cdot (Y - Y^2 / 2) \quad (\text{B 13})$$

3.2 Errechnen von kompakten Geschwindigkeitsprofilen

Gleichung (B 11) bildet die Grundlage zum Errechnen von Geschwindigkeitsprofilen $C = f(Y)$ der Kanalströmungen. Sie wird aber auch für Grenzschichten mit nur sehr geringer Vergrößerung der Grenzschichtdicke in Strömungsrichtung angewandt. Für die Berechnung der Abhängigkeit der Zähigkeit vom Wandabstand wird (B 12) verwendet.

Es werden die Kompaktprofile I bis III vorgestellt. Beim Profil I wächst die Zähigkeit linear mit dem Wandabstand Y . Beim Profil II verschwindet bei $Y = 1$ der Zähigkeitsanstieg und beim Profil III sinkt bei $Y = 1$ die Zähigkeit bis auf $v_e = v$. Profil II entspricht der Bedingung einer Kanalströmung und Profil III einer Grenzschicht.

Tafel C

Kompaktprofil I:

$$v_e / v = 1 + a \cdot Y$$

$$C / C'_0 = \frac{1}{a} \cdot \left\{ \frac{1+a}{a} \cdot \ln(1+a \cdot Y) - Y \right\}$$

$$C'_0 = \frac{a}{(1+1/a) \cdot \ln(1+a) - 1}$$

a	5	10	20	30	40	160
C'_0	4,35	6,11	9,10	11,77	14,25	38,90

Kompaktprofil II:

$$v_e / v = 1 + a \cdot (Y - Y^2 / 2)$$

$$C / C'_0 = \frac{1}{a} \cdot \ln(1 + a \cdot (Y - Y^2 / 2))$$

$$C'_0 = \frac{a}{\ln(1 + a / 2)}$$

Für sehr kleines a wird

$$C / C'_0 = Y - Y^2 / 2 \text{ und } C'_0 = 2$$

Bei $Y = 1$ wird $d(v_e / v) / dY = 0$

a	0,001	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
C'_0	2,0005	2,24	2,29	2,33	2,38	2,42
a	10	20	40	80	160	320
C'_0	5,58	8,34	13,14	21,54	36,41	62,97

Kompaktprofil III:

$$v_e / v = 1 + a \cdot (Y - Y^2)$$

$$\frac{C}{C'_0} = 1/2a \cdot \ln(1 + Y - Y^2) - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-\Delta}} \cdot \ln \left(\frac{+\sqrt{-\Delta} - 2a + aY}{-\sqrt{-\Delta} + 2a - aY} \right) + \text{Konst.}$$

$$\text{Konst} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-\Delta}} \cdot \ln \left(\frac{+\sqrt{-\Delta} - 2a}{-\sqrt{-\Delta} + 2a} \right)$$

$$\Delta = -a - 4a^2$$

Die Abhängigkeit $C(Y)$ für spezielle Kompaktprofile zeigt Abbildung 3

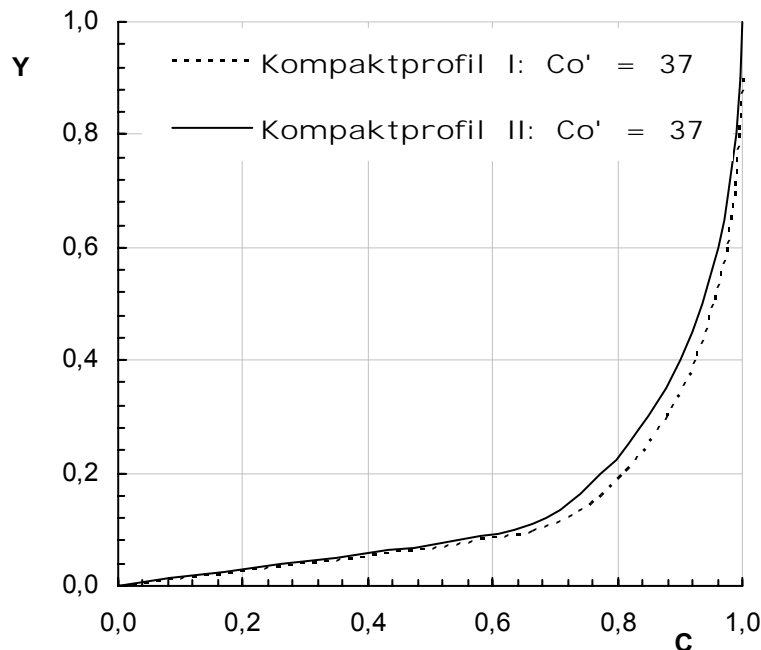


Abbildung 3: Geschwindigkeitsprofile für unterschiedliche Zähigkeitsverläufe

4 Das Zweiparabel-Profil

Die Funktion (B 11) wird entsprechend Abbildung 4 vereinfachend angesetzt. Zwei Geraden, die beide von den Punkten 1 auf Abszisse und Ordinate ausgehen, schneiden einander bei der Abszisse Y_D und der Ordinate $r \cdot Y_D$ im Punkt D.

In der folgenden Rechnung werden die Zusammenfassungen (D 1) angewandt. Bei laminarer Strömung gilt $\alpha = \beta = 1$. Bei Laminarität besteht zwischen r und Y_D der Zusammenhang $Y_D = 1/(1+r)$.

Die gestrichelte Gerade in Abbildung 4 entspricht dem Steigungs- Verlauf der Geschwindigkeit einer laminaren Strömung. Das Doppelintegral über die von A nach B gehende Gerade stimmt mit dem Integral über $C(Y)$ überein, es entspricht also der mittleren Geschwindigkeit bei Laminarität. Das Integral über die Fläche A D B C.A ist so groß wie das Integral über $C(Y)$ bei Turbulenz.

Das Integral über die Differenzfläche A B D A entspricht dem Verlust an Transportgeschwindigkeit, den eine turbulente Schicht gegenüber einer laminaren bei gleich großem Druckabfall erfährt.

Das unbestimmte Integral über A B D liefert (abgesehen vom laminaren Fall mit nur einem Parabelbogen) Geschwindigkeitsprofile, die aus zwei Parabel- Bögen zusammengesetzt sind und bei Y_D stetig bezüglich C und dC/dY verlaufen.

Das Integrieren wird nach Gleichung (D 2), aufgeteilt in einen wandnahen Bereich zwischen $Y = 0$ und $Y = Y_D$, sowie in einen wandfernen Bereich, zwischen $Y = Y_D$ und $Y = 1$ entsprechend (D 3). Für den dimensionslos gemachten Geschwindigkeitsanstieg C'_0 bei $Y = 0$ schreibt man (D 4). Damit werden entsprechend (D 5) und (D 6) die bestimmten Integrale über die Geschwindigkeit geschrieben. Bei sehr kleinem Y_D (gegen Null gehend) strebt das Integral über C einem Grenzwert zu. (D 7) und Tabelle 1.

Im allgemeinen wird die Größe des Parameters r aus dem Vergleich dieser bestimmten Integrale mit Messwerten festgestellt. Jedoch lässt sich $r(Y_D)$ in einem Spezialfall stark beschleunigter Strömungen auch errechnen. Aus (D 2) wird die zweite Geschwindigkeitsableitung an der Wand gebildet, (D 8). Wenn $C'_0 = \alpha$ gesetzt wird, dann ergibt sich aus dem Produkt $\alpha \cdot C'_0$ nach kurzer Zwischenrechnung die quadratische Gleichung (D 9), mit der Wurzel (D 10). Die Hagenzahl wird $Ha^* = (C'_0)^2$.

Die r -Werte werden gleich oder größer als Eins. Das mit dieser Rechnung erfassbare größte Y_D beträgt 0,17, hierbei wird der Radikant von (D 10) zu Null. Für sehr kleines Y_D wird $r = 1$.

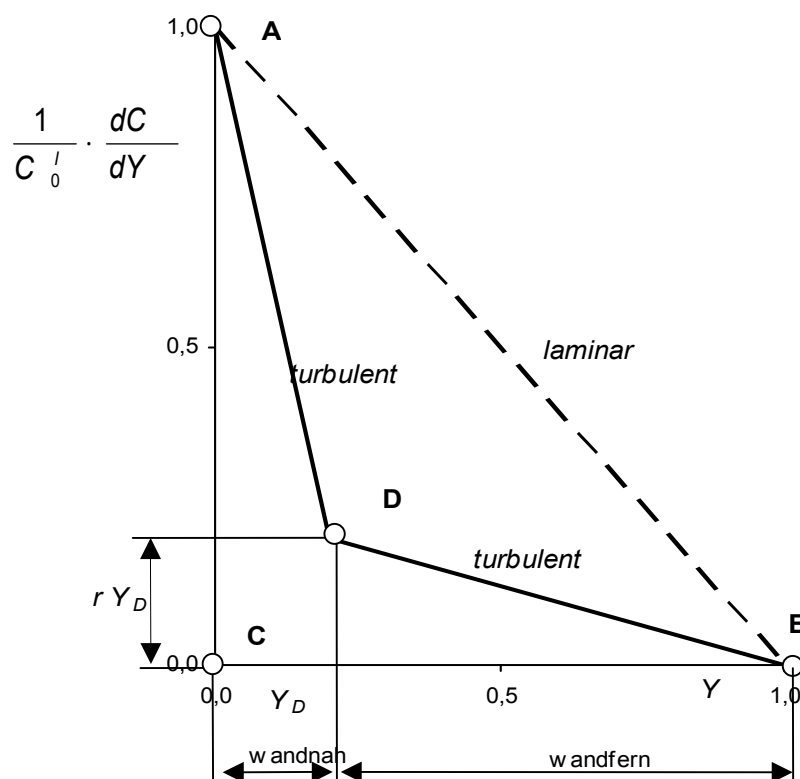


Abbildung 4 Der mit dem Anstieg der Geschwindigkeit an der Wand C'_0 dimensionslos gemachte Anstieg der Geschwindigkeit in Abhängigkeit vom Wandabstand Y für das Zweiparabelprofil

Tafel D

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1-r \cdot Y_D}{Y_D} \\ \beta &= \frac{r \cdot Y_D}{r-Y_D} \\ \gamma &= \frac{2}{1+r} \\ \delta &= \frac{2r}{1+r} \cdot \frac{1}{1-Y_D} \end{aligned} \right\} \quad (D 1)$$

wandnaher Bereich:

$$\frac{1}{C_0^I} \cdot \frac{dC_I}{dY} = 1 - \alpha \cdot Y \quad \frac{C_I}{C_0^I} = Y - \alpha \cdot \frac{Y^2}{2} \quad \int_0^{Y_D} \frac{C_I}{C_0^I} \cdot dY = \frac{Y_D^2}{2} - \alpha \cdot \frac{Y_D^3}{6} \quad (D 2)$$

wandferner Bereich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{C_0^I} \cdot \frac{dC_{II}}{dY} &= \beta \cdot (1-Y) \\ \frac{C_{II}}{C_0^I} &= \beta \cdot \left(Y - \frac{Y^2}{2} \right) + \text{Konst} / C_0^I \\ \int_{Y_D}^1 \frac{C_{II}}{C_0^I} \cdot dY &= \beta \cdot \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{Y_D^2}{2} - \frac{Y_D^3}{6} \right) \right\} + (\text{Konst} / C_0^I) \cdot (1-Y_D) \\ \text{Konst} / C_0^I &= (1-\beta) \cdot Y_D + (\beta-\alpha) \cdot \frac{Y_D^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (D 3)$$

$$C_0^I = \frac{2}{(1+r) \cdot Y_D} = \frac{\gamma}{Y_D} \quad (D 4)$$

$$\int_0^{Y_D} C_I \cdot dY = \frac{\gamma}{Y_D} \cdot \left(\frac{Y_D^2}{2} - \frac{Y_D^3}{6} \right) = \gamma \cdot \left(\frac{Y_D}{2} - \frac{Y_D^2}{6} \right) \quad (D 5)$$

$$\int_{Y_D}^1 C_{II} \cdot dY = \frac{\gamma \cdot \beta}{Y_D} \cdot \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{Y_D^2}{2} - \frac{Y_D^3}{6} \right) \right) + \frac{\gamma}{Y_D} \cdot \left\{ (1-\beta) \cdot Y_D + (\beta-\alpha) \cdot \frac{Y_D^2}{2} \right\} \cdot (1-Y_D) \quad (D 6)$$

$$\int_0^1 C dY = \int_0^{Y_D} C_I dY + \int_{Y_D}^1 C_{II} dY =$$

$$\gamma \cdot \left[1 - Y_D/2 - \alpha \cdot (Y_D^2/6 + Y_D/2 \cdot (1 - Y_D)) - \beta \cdot (1 - Y_D - (1 - Y_D) \cdot Y_D/2) \right] +$$

$$+ \delta \cdot (1/3 - Y_D^2/2 + Y_D^3/6)$$

Spezialisiert für $r=1$ gilt:

$$\int_0^1 C \cdot dY = 1/2 + 1/3 \cdot (Y_D - Y_D^2) + \frac{1}{1 - Y_D} \cdot (1/3 - Y_D + Y_D^2 - Y_D^3/3)$$

Bei $Y_D \rightarrow 0$ findet man

$$\int C_I \cdot dY = 0 \quad \text{und}$$

$$\int_{Y_D}^1 C_{II} \cdot dY = \int_0^1 C \cdot dY = \frac{2}{1+r} \cdot \left(\frac{r}{3} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{D7})$$

$$\frac{d^2 C}{dY^2} = C'_0 \cdot \left(-\frac{1-r \cdot Y_D}{Y_D} \right) = C'_0 \cdot (-\alpha) = -Ha^* \quad (\text{D8})$$

$$r^2 - \frac{1-Y_D}{Y_D} \cdot r + \frac{1}{Y_D} = 0 \quad (\text{D9})$$

$$r = \frac{1-Y_D}{2Y_D} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4Y_D}{(1-Y_D)^2}} \right) \quad (\text{D10})$$

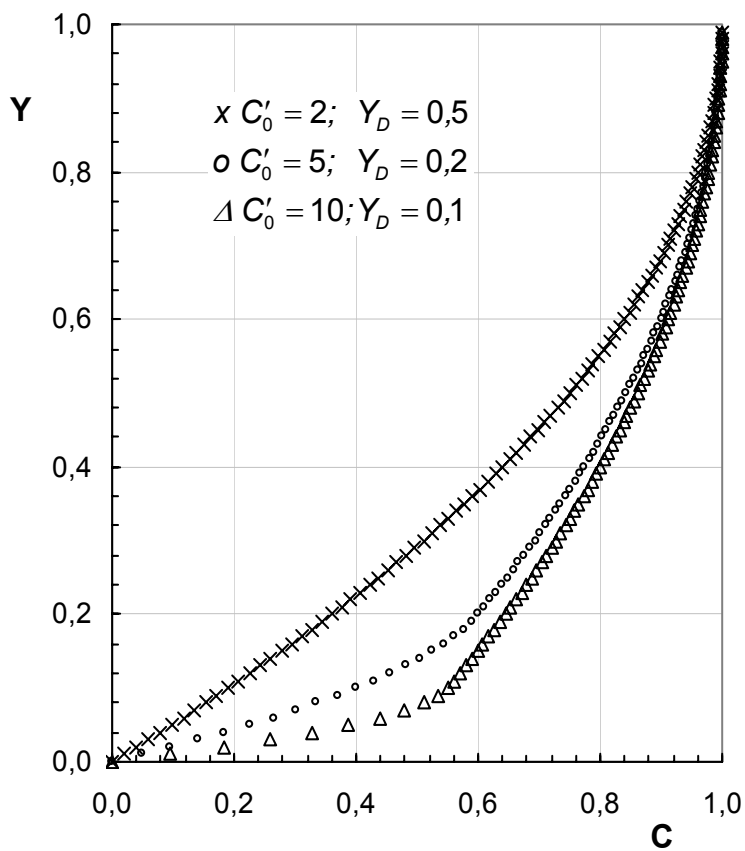


Abbildung 5 Geschwindigkeitsprofile mit dem Ansatz von zwei Parabeln (nach Gleichungen D 2 und D 3) berechnet. Der Kurvenzug $C'_0 = 2$ entspricht einer laminaren Strömung

Tabelle 1: Gemittelte Geschwindigkeiten $\int_0^1 C dY$ von Zweiparabel- Profilen abhängig von Y_D und dem Wert r .

	$r = 1,0$	$r = 0,8$	$r = 0,6$	$r = 0,4$	$r = 0,2$	$r = 0,0$
Y_D						
1 / 2	0,6667	0,6852	0,7083	0,7381	0,7778	0,8333
1 / 3	0,7222	0,7407	0,7639	0,7937	0,8333	0,8889
1 / 4	0,7500	0,7685	0,7917	0,8214	0,8611	0,9167
1 / 5	0,7667	0,7852	0,8083	0,8381	0,8778	0,9333
1 / 6	0,7778	0,7963	0,8194	0,8492	0,8889	0,9444
1 / 7	0,7857	0,8042	0,8274	0,8571	0,8968	0,9524
1 / 8	0,7917	0,8102	0,8333	0,8631	0,9028	0,9583
1 / 9	0,7963	0,8148	0,8380	0,8677	0,9074	0,9630
1 / 10	0,8000	0,8185	0,8417	0,8714	0,9111	0,9667
1 / 20	0,8167	0,8352	0,8583	0,8881	0,9278	0,9833
1 / 40	0,8250	0,8435	0,8667	0,8964	0,9361	0,9917
1 / 80	0,8292	0,8477	0,8708	0,9006	0,9403	0,9958
1 / 160	0,8313	0,8498	0,8729	0,9027	0,9424	0,9979
→ 0	0,8333	0,8519	0,8750	0,9048	0,9444	1,0000

Ein Zweiparabelprofil wurde bereits mit [18] im Jahr 1995 vorgestellt. Die berechneten Profile $C(Y)$ stimmten mit Messungen gut überein.

5 Bei Turbulenz mindern parasitäre Wirbel die fluide Transportarbeit gegenüber der laminaren Strömung

Im turbulenten Strom bilden sich andauernd Wirbel, deren Energie bald durch Reibungsarbeit verbraucht wird, die Wirbel verschwinden wieder, doch schon sind neue Wirbel entstanden. Beim gleichen Druckgefälle bewegt sich eine turbulente Kanalströmung weniger schnell als die nicht durch Wirbel gebremste laminare Strömung. Bisweilen hat man die überlagerten Wirbel „Energie- Parasiten“ genannt.

Um eine quantitativ begründbare Vorstellung von der Größe des Arbeitsverbrauchs zu erhalten folgt eine Rechnung für ein vereinfachtes System. Der natürliche Ablauf andauernden Wirbelbildens und Verlöschens wird mit beständig bleibenden Wirbelfeldern ersetzt, die einem überlagerten Hauptstrom Energie entziehen und in Reibungsarbeit wandeln. Mit Kenntnis der Kinematik von Wirbelfeldern [11] wird die kinetische Energie, die dem Hauptstrom entnommen wird, errechenbar.

Man reduziert die Wirbel zum ebenen Wirbelfeld (Abb. 22. 3 in [14]). Mit dessen Stromfunktion (E 1); findet man durch Differenzieren die Geschwindigkeitskomponenten (E 2). Deren Quadrate (E 3) liefern die kinetische Energie pro Masseneinheit. Die Integrale über das laminare und das turbulente Feld (nach (A. 10)) sind unter (E 6) eingeordnet, deren Differenz ist als (E 7) aufgeschrieben. Damit kann über (E 8) die Energiedifferenz pro Masseneinheit errechnet werden. In der Gleichung (E 9) wurde berücksichtigt, dass auf einer Fläche h^2 die Anzahl von n^2 Wirbelfeldern einzufügen ist.

In der Gleichung (E 9) erscheint im Zähler, auf der linken Seite, die Wirbelgeschwindigkeit $K \cdot a_i$. Im Nenner steht das Maximum der turbulenten Hauptgeschwindigkeit. Wenn im

Beispiel als kinetische Energie des turbulenten Hauptstromes vom Profil (A 10) der Zahlenwert 7/9 eingesetzt wird, dann müsste das turbulente Geschwindigkeitsprofil mindestens $C'_0 = 5,08$ erreichen. Dieser Wert liegt nahe bei der unteren Grenze des voll ausgebildeten turbulenten Gebiets in Prandtls Koordinaten (Abbildung 2) .

Tafel E

$$\Psi = K \cdot \cos \gamma \cdot \cos \delta$$

$$K [m^2 / s];$$

$$\gamma = a_i \cdot x;$$

$$\delta = a_i \cdot y$$

$$\left. \begin{aligned} c_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = K \cdot ((-a_i) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \delta) \\ c_y &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = K \cdot a_i \cdot \sin \gamma \cdot \cos \delta \end{aligned} \right\} \quad (E 2)$$

$$c_{ges}^2 = c_x^2 + c_y^2 = K^2 \cdot a_i^2 \cdot (\cos^2 \gamma \cdot \sin^2 \delta + \sin^2 \gamma \cdot \cos^2 \delta) \quad (E 3)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{ges}^2 \cdot d\gamma \cdot d\delta \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 \gamma \cdot d\gamma &= \frac{1}{4} \cdot \sin 2\gamma + \frac{\gamma}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi \cdot \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \gamma \cdot d\gamma &= -\frac{1}{4} \cdot \sin 2\gamma + \frac{\gamma}{2} \Big|_0^{2\pi} = \pi \end{aligned} \right\} \quad (E 4)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} c_{ges}^2 \cdot d\gamma \cdot d\delta = 2\pi^2 \cdot K^2 \cdot a_i^2 \cdot [m^2/s^2] \quad (E 5)$$

$$C_L^2 = (C'_0)^2 \cdot (Y^2 - Y^3 + Y^4/4)$$

$$\int_0^1 C_L^2 dY = (C'_0)^2 (Y^3/3 - Y^4/4 + Y^5/20) \Big|_0^1 = \frac{2}{15} \cdot (C'_0)^2 \quad (E 6)$$

$$(C_T)^2 = Y^{2/7}$$

$$\int_0^1 (C_T)^2 \cdot dY = 7/9$$

$$\int_0^1 C_L^2 dY - \int_0^1 C_T^2 dY = \frac{2}{15} \cdot (C'_0)^2 - \frac{7}{9} \quad (E 7)$$

$$2 \cdot \pi^2 \cdot K^2 \cdot a_i^2 = \left(\frac{2}{15} \cdot (C_0')^2 - \frac{7}{9} \right) \cdot c_{T \max}^2 \quad (\text{E } 8)$$

$$\frac{K \cdot a_i}{c_{T \max}} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{2/15 \cdot (C_0')^2 - 7/9}{2 \cdot \pi^2}} \quad (\text{E } 9)$$

6 Die Verbindung des Anstieges der Geschwindigkeit an der Wand mit der Reynoldszahl Re bei der Kanalströmung

Bei der Kanalströmung lässt sich der in der Überschrift formulierte Zusammenhang leicht bestimmen, weil erstens für gleichgroßen Druckabfall in Strömungsrichtung die Steigung C_0' eines vergleichbaren laminaren und die des turbulenten Geschwindigkeitsprofils an der Wand gleich groß sind; und weil zweitens die Höhen beider zu vergleichenden Geschwindigkeitsprofile mit der halben Kanalhöhe h übereinstimmen. Die Indizes L und T stehen für Laminarität und für Turbulenz.

Es kann das Verhältnis zugehöriger mittlerer Geschwindigkeiten von Laminarität und Turbulenz dem Verhältnis der Reynoldszahlen Re_L/Re_T gleichgesetzt werden (F. 1). Mit Re^* wird eine Reynoldszahl bezeichnet, bei der die Laminarität endet und die Turbulenz beginnt. Beim Zahlenwert $Re^* = 2039$ liegt der gemeinsame Punkt in den Auftragungen $\lambda(Re)$ des nach Hagen geltenden Verlaufes für Laminarität und des Verlaufes für Turbulenz nach Blasius. Re^* bleibt in der Rechnung eine konstante Größe. Bei $Re = Re^*$ gilt $C_0' = 2$. Mit wachsender Reynoldszahl Re_L ändert sich der Verhältniswert Re_L/Re^* . Wenn nämlich der laminare Wert um den Faktor m wächst, also auf $m = C_0'/2$ ansteigt, sinkt Re^* als Vergleichswert auf $1/(m \cdot C_0'/2)$ entsprechend (F 2). Es lässt sich aus (F 1) und (F 2) dann auch das Verhältnis Re_T/Re^* zu (F 3) bestimmen. Damit ist es möglich, bei bekanntem Anstieg an der Wand C_0' und gegebenem Geschwindigkeitsprofil $C(Y)$, das bestimmte Integral von C über Y auszurechnen und schließlich dem Reynoldszahlverhältnis Re_T/Re^* zuzuordnen (F 3).

Tafel F

$$\frac{Re_L}{Re_T} = \frac{c_{\text{mittelL}}}{c_{\text{mittelT}}} = \frac{C_0' / 3}{\int_0^1 C_T \cdot dY} \quad (\text{F } 1)$$

$$\frac{Re_L}{Re^*} = \left(\frac{C_0'}{2} \right)^2 \quad (\text{F } 2)$$

$$\frac{Re_T}{Re^*} = \frac{Re_L}{Re^*} \cdot \frac{Re_T}{Re_L} = \left(\frac{C_0'}{2} \right)^2 \cdot \frac{3 \cdot \int_0^1 C_T \cdot dY}{C_0'} = \frac{3}{4} \cdot C_0' \cdot \int_0^1 C_T \cdot dY \quad (\text{F } 3)$$

$$\tau_W = \nu \cdot \rho \cdot C_0' \cdot \frac{c_{max}}{h} \quad (F 4)$$

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{mittel}^2} = \frac{\nu}{c_{mittel} \cdot 4 \cdot h} \cdot 4 \cdot C_0' \cdot \frac{c_{max}}{c_{mittel}} = 4 \cdot \frac{C_0'}{Re_T} \cdot \frac{c_{max}}{c_{mittel}}$$

$$\lambda = 8 \cdot \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{mittel}^2} = 8 \cdot 4 \cdot \frac{C_0'}{Re_T} \cdot \left(\frac{c_{max}}{c_{mittel}}\right)_T \quad (F 5)$$

$$\lambda = 32 \frac{4}{3 \cdot Re^* \cdot \left(\int_0^1 C \cdot dY\right)^2} = \frac{42,67}{Re^*} \cdot \frac{1}{\left(\int_0^1 C \cdot dY\right)^2} \quad (F 6)$$

6.1 Eine Verbindung zum Widerstandsbeiwert

Wenn C_0' und Re_T bekannt sind, kann die Verbindung zur dimensionslosen Wandschubspannung und zum Widerstandsbeiwert hergestellt werden (F 4) und (F 5). Damit ist auch der Verlustbeiwert λ der Kanalströmung erfassbar [13]. Die Abhängigkeit $Re_T = f(C_0')$ ist mit (F 3) festgelegt, dieses in (F 5) eingesetzt, führt zur Endgleichung (F 6).

6.2 Über den Zusammenhang des Geschwindigkeitsanstieges an der Wand C_0' und Reynoldszahl bei Grenzschichten

In den voran geschriebenen Kapiteln war die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Wandabstand in turbulenten Kanalströmungen ermittelt worden. Nun soll weiterhin erkundet werden zu welcher Reynoldszahl eine Grenzschichtströmung gehört, deren dimensionsloser Geschwindigkeitssteigung an der Wand C_0' beträgt.

Man benutzt dazu die Postulate der Ähnlichkeitsmechanik [14] und ein von Blasius im Jahr 1913 publiziertes Messergebnis [2], auf Tafel G unter (G 1) stehend. In strömungsmechanischen Anwendungen verwendet man die unter (G 2) stehenden Formen. Mit Re wird bei Rohr- und Kanalströmungen gearbeitet, mit Re_δ bei Grenzschichten. Für ein gerades zylindrisches Rohr mit dem Durchmesser D gilt $Re = c_{mittel} D / \nu$. Unter (G 2) findet man eine Beziehung des Widerstandsbeiwerts λ zur Wandschubspannung τ_W . Damit kann (G1) zu (G3) umgeschrieben werden. Der in (G 2) und (G 3) stehende Quotient A/U , er wird hydraulischer Durchmesser genannt (A ist der Querschnitt der Strömung, U der benetzte Umfang), wird unter (G4) für die Kanalströmung bestimmt. (Es bedeuten $H = 2h$ die Kanalhöhe und b die Kanalbreite).

Nachfolgend wird eine Strömung innerhalb einer Kanalhälfte mit einer unbeschleunigten Grenzschichtströmung längs einer ebenen Platte verglichen. Die halbe Kanalhöhe h geht dann in die Grenzschichtdicke δ über. Der dimensionslose Reibungsbeiwert wird der Wand - Schubspannung gleich gesetzt. Die so gebildete neue Gleichung nach Re_δ aufgelöst, führt zu (G7), wobei $h = \delta$ gesetzt wird. Gleichung (G 7) nach C_0' aufgelöst, mit der Näherung $c_{max}/c_{mittel} = 8/7$ ergibt (G 8).

Tafel G

$$\lambda = 0,3164 \cdot Re^{-1/4} \quad (G 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{4 \cdot A / U \cdot (-dp / ds)}{\rho \cdot c_{mittel}^2}; \\ Re &= 4 \cdot (A / U) \cdot (c_{mittel} / \nu); \\ Re_{\delta} &= c_{max} \cdot \delta / \nu \\ \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{mittel}^2} &= \lambda / 8 \end{aligned} \right\} \quad (G 2)$$

$$\frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{mittel}^2} = \frac{0,3164}{8} \cdot (4(A/U) \cdot (c_{mittel} / \nu))^{-1/4} \quad (G 3)$$

$$A/U = \frac{H \cdot b}{2H + 2b}$$

für b sehr viel größer als H wird

$$A/U = H/2 = h \quad (G 4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{mittel}^2} &= \frac{0,3164}{8} \cdot \left(\frac{4hc_{mittel}}{\nu} \right)^{-1/4} \\ &= 0,027967 \cdot \left(\frac{h \cdot c_{mittel}}{\nu} \right)^{-1/4} = 0,02797 \cdot Re_{\delta}^{-1/4} \cdot \left(\frac{c_{mittel}}{c_{max}} \right)^{-1/4} \end{aligned} \quad (G 5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_W}{\rho \cdot c_{mittel}^2} &= \frac{\nu \cdot \rho \cdot (dc_x / dy)_{y=0}}{\rho \cdot c_{mittel}^2} \\ &= \frac{\nu \cdot C_0' \cdot c_{max}}{c_{mittel} \cdot \delta \cdot c_{mittel}} = \frac{C_0'}{Re_{\delta}} \cdot \left(\frac{c_{max}}{c_{mittel}} \right)^2 \end{aligned} \quad (G 6)$$

$$\left. \begin{aligned} Re_{\delta} &= 117,80 \cdot (C_0')^{4/3} \cdot \left(\frac{c_{max}}{c_{mittel}} \right)^{7/3} \\ Re &= 4 \cdot Re_{\delta} \cdot \left(\frac{c_{mittel}}{c_{max}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (G 7)$$

$$\left. \begin{aligned} C_0' &= 2,21 \cdot 10^{-2} Re_{\delta}^{3/4} \\ Re_{\delta} &= 160,86 \cdot (C_0')^{4/3} \end{aligned} \right\} \quad (G 8)$$

Beispiel 1

Laminare Strömung

Mit dem kleinsten Grenzwert der Messung von Blasius bei $Re = Re_K$ und $C'_0 = 2$, sowie

$$\frac{c_{max}}{c_{mittel}} = \frac{3}{2} \text{ . errechnet man aus (G 7):}$$

$$Re_{\delta} = 117,80 \cdot 2^{4/3} \cdot (3/2)^{7/3} = 764,5 \text{ . und}$$

$$Re = Re_K = 4 \cdot Re_{\delta} \cdot \frac{c_{mittel}}{c_{max}} = 4 \cdot 764,5 \cdot \frac{2}{3} = 2039$$

Beispiel 2:Mit $Y_D = \frac{1}{20}$ und $r = 1$.

Es gilt nach Seite 18

$$\frac{c_{mitte}}{c_{max}} = \int_0^1 C \cdot dY = 0,8167 \text{ und } C'_0 = 20 :$$

$$Re_{\delta} = 117,80 \cdot 20^{4/3} \cdot 1 / 0,8167^{7/3} = 1,03 \cdot 10^4 ;$$

$$Re = 4 \cdot 0,8167 \cdot 1,03 \cdot 10^4 = 3,36 \cdot 10^4$$

Beispiel 3:

Wie groß werden bei der Kanalströmung C'_0 und $\frac{c_{mittel}}{c_{max}}$, wenn die Reynoldszahl $Re = 10^5$ beträgt?

Nach Gleichung (G7) wird

$$Re = 4 \cdot 117,8 \cdot (C'_0)^{4/3} \cdot \left(\frac{c_{max}}{c_{mittel}} \right)^{4/3} ;$$

$$C'_0 = (10^5)^{3/4} \cdot \left(\frac{c_{max}}{c_{mittel}} \right)^{-9/16} \cdot (468)^{-3/4} = 56 \cdot \left(\frac{c_{max}}{c_{mittel}} \right)^{3/4}$$

Nach Kapitel 4 gilt für ein Zweiparabel- Profil mit $r = 1$, $\frac{c_{mittel}}{c_{max}} = 0,83$. Also wird $C'_0 = 64$.

Beim Anwenden der Gleichung (G 3) von Blasius gilt als obere Grenze der Reynoldszahl $Re = 10^5$. Mit einer Weiterrechnung von Prandtl kann die Anwendungsgrenze bis nach $Re = 10^7$ verschoben werden (Siehe folgende Tabelle)

Re	λ	C'_0
$5 \cdot 10^5$	0,0131	179
$1 \cdot 10^6$	0,0116	317
$5 \cdot 10^6$	0,0090	1230
$1 \cdot 10^7$	0,0081	2210

7 Die Hagenzahl einer Kanalströmung

Die Hagenzahl gilt als Verhältnis von Druckkraft zur Zähigkeitskraft. Bei den Grenzschichten lässt sie sich als Randbedingung festlegen:

An der Wand, bei $Y = 0$, entspricht die zweite Ableitung der Geschwindigkeit C nach Y der negativen Hagenzahl.

$$-Ha^* = \left(d^2 C / dY^2 \right)_{Y=0} \quad (H 1)$$

$$Ha^* = \frac{(-dp/dx) \cdot \delta^2}{c_{max} \cdot \nu \cdot \rho} \quad (H 2)$$

Dabei besteht zwischen dp/dx und der Geschwindigkeitsänderung folgender Zusammenhang:

$$-dp/dx = \rho \cdot c \cdot dc/dx \quad (H 3)$$

Bei den Kanal- und Rohrströmungen arbeitet man mit konstant bleibendem Querschnitt. Der bekannten Beziehung (Gleichung (21.15) in [14])

$$\lambda = 2 \cdot \frac{Ha}{Re} \quad (H 4)$$

setzt man die Gleichung für den Reibungsbeiwert der Wandreibung gegenüber:

$$\lambda = 8 \cdot \frac{\tau_w}{\rho \cdot c_{mittel}^2} = 8 \cdot \frac{\nu \cdot \rho \cdot C'_0 \cdot c_{max}}{\rho \cdot c_{mittel}^2 \cdot h} = 8 \cdot 4 \cdot \left(\frac{\nu}{4 \cdot c_{mittel} \cdot h} \right) \cdot C'_0 \cdot c_{max} / c_{mittel} \quad (H 5)$$

Das Gleichsetzen von (H 4) und (H 5) führt zu ²

$$Ha = 16 C'_0 \cdot (c_{max} / c_{mittel}) \quad \text{und} \quad Ha^* = C'_0 \quad (H 6)$$

7.1 Beispiele

Eine laminare Strömung mit $C'_0 = 2,0$ und $\frac{c_{max}}{c_{mittel}} = \frac{3}{2}$, ergibt:

$$Ha = \frac{16 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 48 \quad \text{und} \quad Ha^* = 2$$

Für eine spezielle turbulente Strömung mit $C'_0 = 20$, $\frac{c_{max}}{c_{mittel}} = 0,8167$, ergibt sich $Ha = 392$.

² Den Rechnungen des Kapitels 21 im Lehrbuch Angewandte Strömungslehre [14] war eine Definition der Ha-Zahl entsprechend der Ähnlichkeitsmechanik im Kapitel 21 zu Grunde gelegt. Beim Anwenden auf Grenzschichten im Kapitel 24.5 wurde jedoch die Hagenzahl dem früher von den Strömungsmechanikern verwendeten „Pohlhausen-Parameter“ $Ha^* = -dp/dx \cdot \delta^2 / (\eta \cdot c_{max})$ angepasst. Beim weiteren Gebrauch war das unterscheidende (*) fortgelassen worden. Zwischen beiden unterschiedlich definierten Hagenzahlen besteht (bei $h = \delta$) der Zusammenhang $Ha/Ha^* = 16 \cdot c_{max} / c_{mittel}$.

8 Das Umformen von Geschwindigkeitsprofilen der Kanalströmung in Geschwindigkeitsprofile von Grenzschichten³

Gegenüber den Profilen der Kanalströmung wird bei Grenzschichten zusätzlich gefordert

$$\left(\frac{d^2 C}{dY^2} \right)_{Y=0} = -Ha^* = b \cdot C'_0 \quad (J 1)$$

und, weiterhin wie bisher,

$$\left(\frac{d^3 C}{dY^3} \right)_{Y=0} = 0 \quad (J 2)$$

Die Bedingung (J2) wird aus Prandtls Grenzschichtgleichung gefolgert. (Siehe [14] Gleichung (24.11a)). Beim Ableiten der Grenzschichtgleichung nach Y verschwindet der Summand $(1/\rho) \cdot dp/dx$ auf der linken Gleichungsseite stehend, das Differenzieren der linken Gleichungsseite ergibt Null an der Wand bei $Y = 0$.

Nach dem Impulssatz der Strömungsmechanik (Kapitel 3.5 in [14]) gilt für die Kanalströmung:

$$\tau_{wand} = -\frac{dp}{dx} \cdot h \quad (J 3)$$

mit

$$\tau_{Wand} = \nu \cdot \rho \cdot C'_0 \cdot \frac{c_{max}}{h}$$

wird

$$C'_0 = \frac{-(dp/dx) \cdot h^2}{\nu \cdot \rho \cdot c_{max}} = +Ha^* \quad (J 4)$$

Der Vergleich von (J 1) mit (J 4) zeigt: Es gilt $b = 1$ für den Kanal und mit $Ha^* = C'_0$ ist das Kriterium der Kanalströmung erschienen.

Zum Umwandeln von Kanalströmungen zu Grenzschichtströmungen war in [12]

$$\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} = A \cdot Y \cdot \exp(-\varepsilon \cdot Y) + \frac{1}{C'_0} \cdot \left(\frac{dC}{dY} \right)_{Kanal} \quad (J 5)$$

angesetzt worden. Damit soll den Bedingungen (J 1) und (J 2) genügt werden.

Beispiel 1: Kompaktprofil I

Die Rechnung ergibt $A = 1 + a - b$ und $\varepsilon = \frac{2 \cdot (a + a^2)}{1 + a - b}$, gültig für $b < 1 + a$.

Beispiel 2: Zweiparabelprofil

$$\left(\frac{1}{C'_0} \right)_{Kanal} = 1 - \varepsilon \cdot Y \cdot \text{bei} \cdot Y = 0 \cdot \text{wird} \cdot \left(\frac{1}{C'_0} \right)_{Kanal} = 1$$

$$\left(\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{d^2 C}{dY^2} \right)_{Kanal} = -\varepsilon; \dots$$

$$\left(\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{d^3 C}{dY^3} \right)_{Kanal} = 0.$$

³ Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Beziehung (B 11) in guter Näherung auch für Grenzschichten anwendbar ist.

$$A = \alpha - b; \varepsilon = -\frac{a + a^2}{\alpha - b} \text{ für } b < \alpha.$$

9 Entwicklung von Dreischichten-Profilen

Beim Zweiparabel- Profil ist der Verlauf $1/C'_0 \cdot dC / dY = f(Y)$ nach Abbildung 4 mit nur zwei Schichten, einer wandnahen und einer wandfernen, stark vereinfacht worden. Nun soll zusätzlich eine ausgleichende Mittelschicht eingefügt werden. Das Angebot an möglichen Verläufen lässt sich durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung reduzieren. Schon im Jahr 1954, war eine Ähnlichkeitskennzahl

$$K = \frac{dC / dY}{Y \cdot d^2C / dY^2} \quad (\text{K } 1)$$

für das Strömen in Grenzschichten aufgeschrieben worden [17]. Sie wurde damals nur zu Vergleichen mit Stabilitätsrechnungen von laminaren Grenzschichten benutzt. Die Anwendungsmöglichkeit reicht aber weiter, für turbulente Grenzschichten ist $K = -1$ begründet worden. Damit wird (K 1) als Differentialgleichung geschrieben

$$d^2C / dY^2 + \frac{dC / dY}{Y} = 0 \quad (\text{K } 2)$$

und liefert als Integral für dC/dY das Ergebnis

$$dC / dY = \text{Konst} \cdot \exp(-\int dY / K \cdot Y) = \text{Konst} \cdot \exp(-\ln K \cdot Y) = \text{Konst} \cdot 1 / Y \quad (\text{K.3})$$

Also verläuft der Geschwindigkeitsanstieg dC/dY abhängig vom Wandabstand Y nach einer Hyperbel. Ausgenommen sind Gebiete, in denen Randbedingungen einen anderen Verlauf erzwingen.

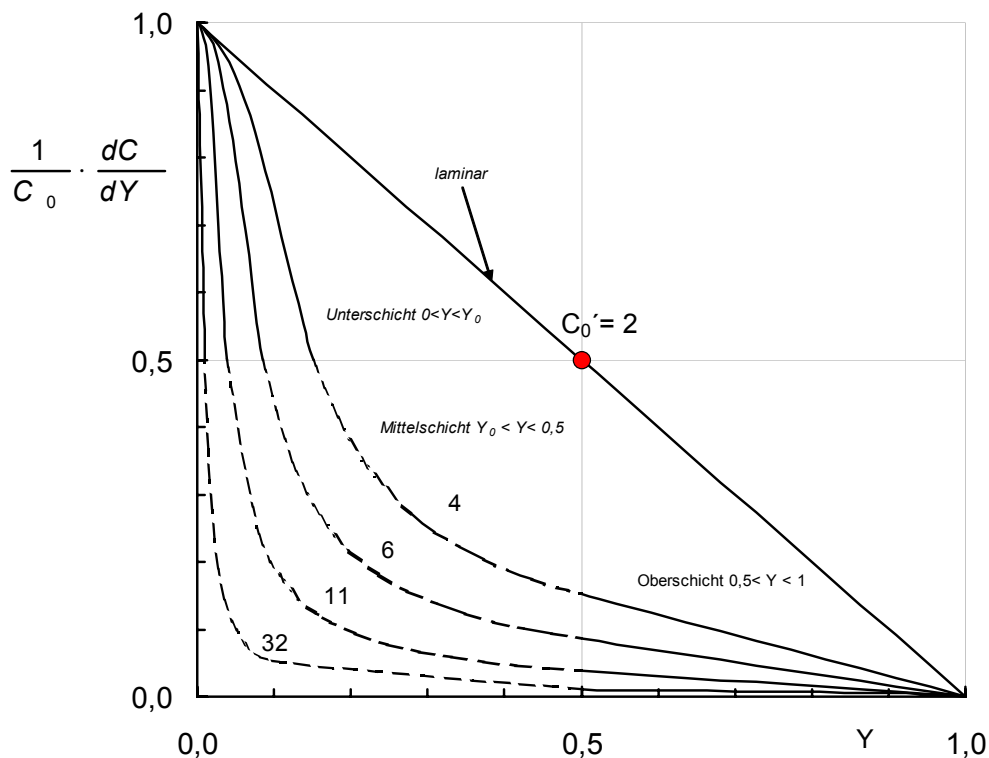


Abbildung 6 Geschwindigkeitsanstieg in einer Kanalströmung über dem Wandabstand. Gestrichelt gezeichnet sind die Hyperbeln in der Mittelschicht mit den Parametern Y_0 und C_0' . Mit abnehmendem C_0' wird der Hyperbelbereich kleiner. Bei Laminarität schrumpft er zu dem gezeichneten Punkt. In diesem Fall ist $C_0' = 2$ und $Y_0 = 0,5$.

Als Arbeitsfeld zu folgenden Rechnungen ist entsprechend (B 11) Abbildung 6 gezeichnet worden, in der der Geschwindigkeitsanstieg $1/C_0' \cdot dC / dY$ über dem Wandabstand Y aufgetragen wird. In das Bild ist auch der Verlauf für ein laminares Profil als Gerade eingetragen. Das unbestimmte Integral von $1/C_0' \cdot dC / dY$ über Y liefert die Abhängigkeit der Geschwindigkeit C vom Wandabstand Y . In Abbildung 6 ist gestrichelt eine Schar gleichseitiger Hyperbeln mit dem Parameter Y_0 gezeichnet.

$$1/C_0' \cdot dC / dY = (Y_0/2) \cdot (1/Y) \quad (\text{L } 1)$$

Das gedachte Verlängern der Hyperbeln bis zu den Extremwerten $1/C_0' \cdot dC / dY = 0$ und $Y = 0$ würde diese ins Unendliche führen. Innerhalb des nun zu entwickelnden Geschwindigkeitsprofils soll die Hyperbelsteigung nur im Gebiet zwischen $Y = Y_0$ und $Y = 1/2$ verwendet werden. An jede der Hyperbeln sind in beiden Koordinatenpunkten mit dem Wert $1/2$ die Tangenten gezeichnet, sämtliche Tangenten treffen die Achsen in den beiden Koordinatenpunkten 1 . Jeder der Linienzüge, der beim Ordinatenwert 1 be-

ginnt, weiter über die Hyperbel läuft und dann, mit der bei $Y = 1/2$ beginnenden Tangente, bis zum Abszissenpunkt $Y = 1$ führt, würde nach dem Integrieren ein Geschwindigkeitsprofil ergeben. Jedoch würde die Tangentensteigung bei $Y = 0$, sie entspricht der zweiten Geschwindigkeitsableitung d^2C/dY^2 an der Wand, eine zu große Hagenzahl ergeben. Denn für die Kanalströmung, die zuerst berechnet wird, muss gelten:

$$\frac{-d^2C}{dY^2} = Ha^* = C'_0$$

Diesen Wert für Ha^* erhält man, wenn die geradlinige Tangente durch die Funktion

$$1/C'_0 \cdot dC/dY = 1 - Y + (1/2 - Y_0) \cdot (-3 \cdot (Y/Y_0)^3 + 2 \cdot (Y/Y_0)^4) \quad (L.2)$$

ersetzt wird. Beim Punkt mit den Koordinaten $\frac{1}{C'_0} \frac{dC}{dY} = \frac{1}{2}$ und $Y = Y_0$ schließt der Verlauf (4.2) an die Hyperbel (L.1) an.

9.1 Das Dreischichtenprofil für die Kanalströmung

Folgende Randbedingungen: werden zur Rechnung für die Kanalströmung berücksichtigt

Bei $Y = 0$ an der Wand gelte $C = 0; \frac{dC}{dY} = C'_0; \frac{d^2C}{dY^2} = -1; \frac{d^3C}{dY^3} = 0.$

Bei $Y = 1$ in Kanalmitte gelte $C = 1; \frac{dC}{dY} = 0.$

Man operiert weiterhin mit einem über Y dreifach unterteilten Neigungsverlauf der Geschwindigkeit in folgenden Schichten

Unterschicht zwischen $Y = 0$ und $Y = Y_0$

Mittelschicht zwischen $Y = Y_0$ und $Y = 1/2$

Oberschicht zwischen $Y = 1/2$ und $Y = 1.$

Es lassen sich Y_0 -Werte, beginnend von sehr kleinen, (die zu hohen Reynoldszahlen gehören), bis zu $Y_0 = 1/2$ verwenden. Bei $Y_0 = 1/2$ erhält man nach Integration das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Strömung. Wie in Abbildung 6 sichtbar, schrumpft bei Laminarität der Hyperbelbereich der Mittelschicht zu einem Punkt zusammen. Also sind zwischen $Y_0 = 1/2$ und ungefähr $Y_0 = 0,1$ auch zeitgemittelte Geschwindigkeitsprofile des Übergangsbereiches von laminar zu turbulent errechenbar.

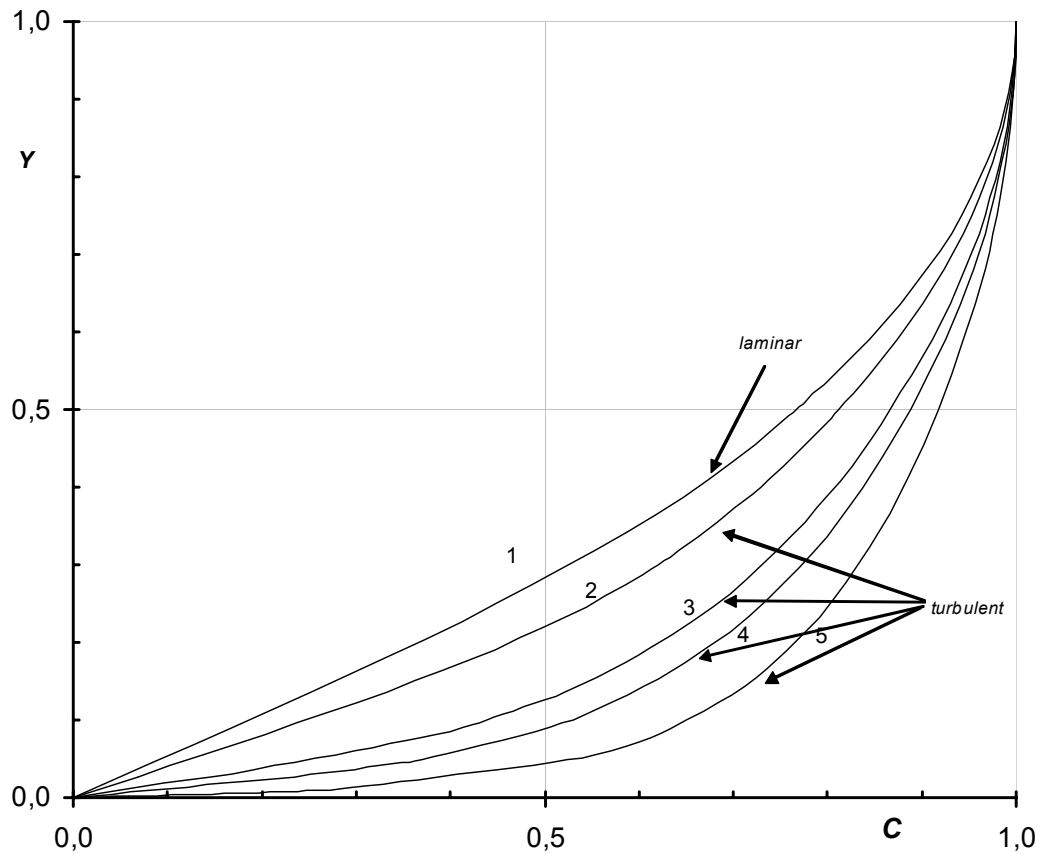


Abbildung 7: Geschwindigkeitsprofile in Grenzschichten für $Ha = 0$ mit dem Dreischichtenprofil berechnet. Der Wert $Y_0 = 1/2$ kennzeichnet das laminare Profil, Mit kleinerem Y_0 werden turbulente Profile beschrieben. (Siehe folgende Tabelle)

Nr.	Y_0	C'_0	Re_δ	$\frac{\tau_w}{\rho \cdot C_{max}^2} = \frac{C'_0}{Re_\delta}$
1	0,5	1,86	$\leq Re_{\delta, krit.}$	$\geq 2/Re_{\delta, krit.}$
2	0,3	2,51	$5,47 \cdot 10^2$	$4,58 \cdot 10^{-3}$
3	0,1	5,32	$1,49 \cdot 10^3$	$3,56 \cdot 10^{-3}$
4	0,05	8,98	$3,00 \cdot 10^3$	$2,99 \cdot 10^{-3}$
5	0,01	32,99	$1,70 \cdot 10^4$	$1,94 \cdot 10^{-3}$

Tafel L

In drei Schichten werden Geschwindigkeitsanstieg und Geschwindigkeit berechnet.

Unterschicht $0 \leq Y \leq Y_0$

$$\frac{1}{C'_0} \frac{dC}{dY} = 1 - Y + (1/2 - Y_0) \cdot (-3 \cdot (Y/Y_0)^3 + (1 - 2Y_0) \cdot (Y/Y_0)^4) \quad (\text{L.1})$$

$$\frac{C}{C'_0} = Y - \frac{Y^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - Y_0\right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{Y^4}{Y_0^3}\right) + (1 - 2Y_0) \cdot \frac{1 \cdot Y^5}{5Y_0^4} \quad (\text{L.2})$$

bei $Y = Y_0$ wird

$$\frac{C}{C'_0} = \frac{33}{40} \cdot Y_0 - \frac{3}{20} \cdot Y_0^2 = K_1 \quad (\text{L.3})$$

Mittelschicht $Y_0 \leq Y \leq 0,5$

$$\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} = \frac{Y_0}{2} \cdot \frac{1}{Y} \quad (\text{L.4})$$

$$\frac{C}{C'_0} = K_1 + \frac{Y_0}{2} \cdot (\ln Y - \ln Y_0) \quad (\text{L.5})$$

bei $Y = 1/2$ wird

$$\frac{C}{C'_0} = K_1 + \frac{Y_0}{2} \cdot \left(\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0\right) = K_2 \quad (\text{L.6})$$

Oberschicht $0,5 \leq Y \leq 1$

$$\frac{1}{C'_0} \cdot \frac{dC}{dY} = 2Y_0(1 - Y) \quad (\text{L.7})$$

$$\frac{C}{C'_0} = K_2 + 2Y_0 \left(Y - \frac{Y^2}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \right) = K_2 + 2Y_0 \left(Y - \frac{Y^2}{2} - \frac{3}{8} \right) \quad (\text{L.8})$$

Bei $Y = 1$ soll $C = 1$ gelten. Aus dieser Normierungsbedingung wird der Geschwindigkeitsanstieg C'_0 an der Wand errechnet.

$$C'_0 = \frac{1}{Y_0(0,7284 - 0,5 \ln Y_0) - (3/20)Y_0^2} \quad (\text{L.9})$$

Der Zusammenhang von Reynoldszahl $Re = \bar{c} \cdot 4 \cdot h / \nu$ und C'_0 wird aus der strömungsmechanischen Grundgleichung $\tau_{Wand} / \rho \cdot \bar{c}^2 = \lambda / 8$ hergeleitet. Die linke Seite

entspricht $\frac{4}{Re} C'_0$, auf der rechten Seite benutzt man das Messergebnis von Blasius, das lautet

$$\lambda = 0,3164 \cdot Re^{1/4},$$

aus dem sich schließlich entwickeln lässt:

$$Re = 563 \cdot (C'_0)^{3/4} \quad (L 10)$$

Bei der Zahlenrechnung ist das Verhältnis von Größtgeschwindigkeit c_{max} zur gemittelten Geschwindigkeit $c_{mittel} = \bar{c}$ einheitlich gleich 8/7 gesetzt worden⁴.

Es wird mit dem Ergebnis verdeutlicht, dass nach dieser Art der Deduktion ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil errechnet werden kann ohne zuvor Messergebnisse anzuwenden oder nach einer Wirbelzähigkeit zu suchen. Erst um die zugehörige Reynoldszahl aufzufinden, ist das Messergebnis benutzt worden.

9.2 Geschwindigkeitsprofile von ebenen turbulenten Grenzschichten.

Während bei einer Kanalströmung die örtlichen Beschleunigungssummanden verschwinden und die Gleichung (B 11) exakt erfüllt wird, gilt bei den Grenzschichten außerhalb der Bedingung $Ha^*/C'_0 = 1$ die Voraussetzung verschwindender Beschleunigungssummanden nicht mehr. Jedoch bleiben diese Summanden immer sehr klein, wenn sich die Grenzschichtdicke δ nur wenig mit der Wegkoordinate x ändert. Bei $Ha^* = 0$ liegt $d\delta/dx$ in der Größenordnung 0,03 bis 0,01, wobei der kleine Wert zur größeren Reynolds-Zahl gehört. Bei größeren Absolutwerten von Ha^* ist mit Hilfe einer Grenzschichtrechnung [14] der Betrag von $d\delta/dx$ zu überprüfen. Für großes $d\delta/dx$ gelten die nachfolgenden Rechnungen nicht.

Zum Berechnen von Grenzschichten wird die Hagenzahl modifiziert. Eine dem s. g. Pohlhausenparameter angepasste Hagenzahl wird durch das Verhältnis von Druck- zur Reibungskraft definiert:

$$Ha^* = \frac{-\frac{dp}{dx} \cdot \delta^2}{\rho \cdot v \cdot c} = \frac{\rho \cdot \bar{c} \frac{d\bar{c}}{dx} \cdot \delta^2}{\rho \cdot v \cdot c} = \frac{1}{v} \cdot \frac{d\bar{c}}{dx} \cdot \delta^2 = \frac{d\bar{c} \cdot \delta_0}{\frac{v}{d \frac{x}{\delta_0}}} \cdot \left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^2 \quad (L 11)$$

Die Hagenzahl der Grenzschicht lässt sich deuten als differentielle Änderung der Reynoldszahl $\bar{c} \cdot \delta_0 / v$ längs eines Wegelements x / δ_0 . Die Hagenzahl ist positiv bei Beschleunigung, negativ beim Verzögern und bei unbeschleunigter Plattenströmung wird sie Null.

Bei jeder Grenzschicht muss an Wand (bei $Y = 0$) die Hagenzahl eben so groß sein wie die negative zweite Geschwindigkeitsableitung. Es gilt

$$Ha^* = -\left(\frac{d^2C}{dY^2}\right)_{Y=0}.$$

⁴ Die Gleichung (L 10) ist aus der Gleichung (G 7) entstanden. $Re_\delta = 117,8 \cdot C'_0{}^{4/3} (c_{mittel}/c_{max})^{7/3}$.

Das Umwandeln in die Reynoldszahl $Re = 4 \cdot Re_\delta (c_{mittel}/c_{max})$ ergibt $Re = 4 \cdot 117,8 \cdot (8/7)^{4/3} \cdot C'_0{}^{4/3} = 563 \cdot C'_0{}^{4/3}$

Der Einfluss der Hagenzahl Ha^* auf den Parameter C'_0 wird zu Ende der folgenden Rechnung mit der Formelzeile (M 8) bestimmt.

Zur Grenzschichtrechnung werden folgende Randbedingungen berücksichtigt:

Für $Y = 0$ an der Wand

$$C = 0; \quad dC/dY = C'_0; \quad d^2C/dY^2 = -Ha^*; \quad d^3C/dY^3 = 0.$$

Für $Y = 1$ am oberen Grenzschichttrand

$$C = 1; \quad dC/dY = 0; \quad d^3C/dY^3 = 0.$$

Wie bei der Kanalströmung wird mit drei Schichten operiert:

Unterschicht zwischen $Y = 0$ und $Y = Y_0$;

Mittelschicht zwischen $Y = Y_0$ und $Y = 1/2$

Oberschicht zwischen $Y = 1/2$ und $Y = 1$

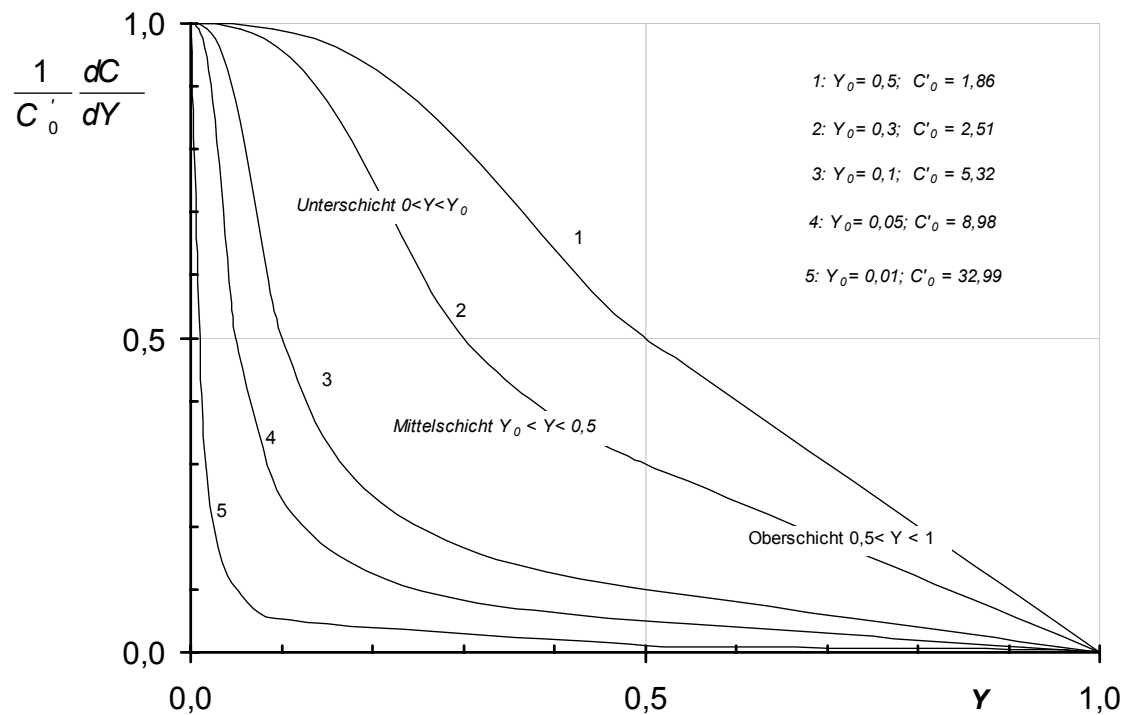


Abbildung 8 Geschwindigkeitsanstiege in Grenzschichtströmungen mit dem Dreischichtenprofil berechnet. 1: laminare Strömung, 2 bis 5: Übergangsgebiet und turbulenter Bereich.

Tafel M

Die **Unterschicht** gilt zwischen $Y = 0$ und $Y = Y_0$

$$\frac{1}{C_0'} \cdot \frac{dC}{dY} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^3 + \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^4 + \frac{Ha^*}{C_0'} \cdot \left\{ -Y + 3 \cdot Y_0 \cdot \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^3 - 2 \cdot Y_0 \cdot \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^4 \right\} \quad (M 1)$$

$$\frac{C}{C_0'} = Y - \frac{3}{8} \cdot \frac{Y^4}{Y_0^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{Y^5}{Y_0^4} + \frac{Ha^*}{C_0'} \cdot \left(-\frac{Y^2}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{Y^4}{Y_0^2} - \frac{2}{5} \cdot \frac{Y^5}{Y_0^3} \right) \quad (M 2)$$

Bei $Y = Y_0$ wird

$$\frac{C}{C_0'} = \frac{33}{40} \cdot Y_0 + \frac{Ha^*}{C_0'} \left(-\frac{3}{20} \cdot Y_0^2 \right) = K_{1G} \quad (M 3)$$

Im Fall $Ha^*/C_0' = 1$ ergeben sich aus den Gleichungen (M.1) bis (M3) die für die Kanalströmung spezialisierten Gleichungen (L.1) bis (L 3).

Die **Mittelschicht** entspricht der einer Kanalströmung, also (L 4) bis (L 6) übernehmen und K_1 durch K_{1G} ersetzen.

Die **Oberschicht** berücksichtigt die Bedingung, dass bei $Y = 1/2$ sowohl die erste, als auch die zweite Geschwindigkeits- Ableitungen mit denen der Mittelschicht übereinstimmen. Man schreibt für erste Ableitung und Geschwindigkeit

$$\frac{1}{C_0'} \cdot \frac{dC}{dY} = 2 \cdot Y_0 \cdot ((1 - Y)) \quad (M 4)$$

und als Geschwindigkeit

$$\frac{C}{C_0'} = 2Y_0 \cdot (Y - Y^2 / 2) + konst. \quad (M 5)$$

Bei $Y = 1/2$ muss $\frac{C}{C_0'}$ eben so groß sein wie an der Anschlussstelle zur Mittelschicht, also

so

$\frac{C}{C_0'} = K_{1G} + \frac{Y_0}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln Y_0 \right) = K_{2G}$. Die Konstante in (M 5) lässt sich damit bestimmen.

$$K_{1G} = \frac{33}{40} \cdot Y_0 + \frac{Ha^*}{C_0'} \left(-\frac{3}{20} \cdot Y_0^2 \right)$$

$$K_{2G} = \frac{33}{40} \cdot Y_0 + \frac{Ha^*}{C_0'} \left(-\frac{3}{20} \cdot Y_0^2 \right) + \frac{Y_0}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln Y_0 \right)$$

$$konst. = K_{2G} + \frac{3}{4} \cdot Y_0 = \frac{33}{40} \cdot Y_0 + \frac{Ha^*}{C_0'} \left(-\frac{3}{20} \cdot Y_0^2 \right) + \frac{Y_0}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln Y_0 \right) + \frac{3}{4} \cdot Y_0 \quad (M 6)$$

Mit (M 5) wird

$$\frac{C}{C_0'} = 2Y_0 \cdot (Y - Y^2 / 2) + \frac{3}{40} Y_0 + \frac{Y_0}{2} \cdot (\ln(1/2) - \ln Y_0) + \frac{Ha^*}{C_0'} \left(-\frac{3}{20} \cdot Y_0^2 \right) \quad (M 7)$$

Bei $Y = 1$ gilt $C = 1$, aus (M 7) wird damit das Steigungsmaß C'_0 bestimmt

$$C'_0 = \frac{1 + \frac{3}{20} \cdot Y_0^2 \cdot Ha^*}{Y_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{40} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1}{2} - \ln Y_0 \right] \right)} \quad (\text{M 8})$$

9.3 Das Ablöseproblem

Mit der durch den Gegendruck verursachten starken Geschwindigkeitsabnahme im ablösenden Gebiet bleibt keine kinetische Energie zum Wirbelbilden verfügbar. Im Extremfall der Ablösung existieren weder Mittel noch Oberschicht. Die gesamte Grenzschicht wird zur bisherigen Unterschicht reduziert. Es wird statt dY nunmehr $d(Y/Y_0)$ gesetzt.

Mit $C'_0 = 0$ erhält man aus (M 1)

$$\frac{dC}{d(Y/Y_0)} = Ha^*_{\text{Ablösung}} \cdot Y_0^2 \left(-\frac{Y}{Y_0} + 3 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^3 - 2 \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 \right) \quad (\text{M 9})$$

Nach Integration folgt die Geschwindigkeit

$$C = Ha^*_{\text{Ablösung}} \cdot Y_0^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 - \frac{2}{5} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^5 \right) \quad (\text{M 10})$$

Bei $Y/Y_0 = 1$ soll $C = 1$ gelten, also wird weiter geschrieben

$$Ha^*_{\text{Ablösung, Unterschicht}} = -\frac{20}{3Y_0^2} \quad (\text{M 11})$$

In der Gleichung (M 11) ist die der Strömung widerstehende Druckkraft auf die kleine Fläche der Unterschicht ($Y_0 \cdot b$) bezogen worden. Zum Anwenden auf die gesamte Grenzschicht muss jedoch auf die größere Grenzschichtfläche ($1/Y_0 \cdot b$) umgerechnet werden. Damit gilt:

$$Ha^*_{\text{Ablösung, Grenzschicht}} = Ha^*_{\text{Ablösung, Unterschicht}} = \frac{1}{1/Y_0} = -Y_0 \frac{1}{Y_0^2} \frac{20}{3}.$$

und schließlich

$$Ha^*_{\text{Ablösung}} = \frac{-20}{3 \cdot Y_0} \quad (\text{M 11a})$$

Im Extremfall der Laminarität gilt $Y_0 = 1/2$. Aus (M 11a) folgt $Ha^*_{\text{Ablösung}} = -13,33$. Einige Zuordnungen von Y_0 zur Hagenzahl der Ablösung stehen in der Tabelle.

Y_0	0,5	0,15	0,1	0,05	0,01
$Ha^*_{\text{Ablösung}}$	-13,3	-44,4	-66,7	-133,3	-666,7

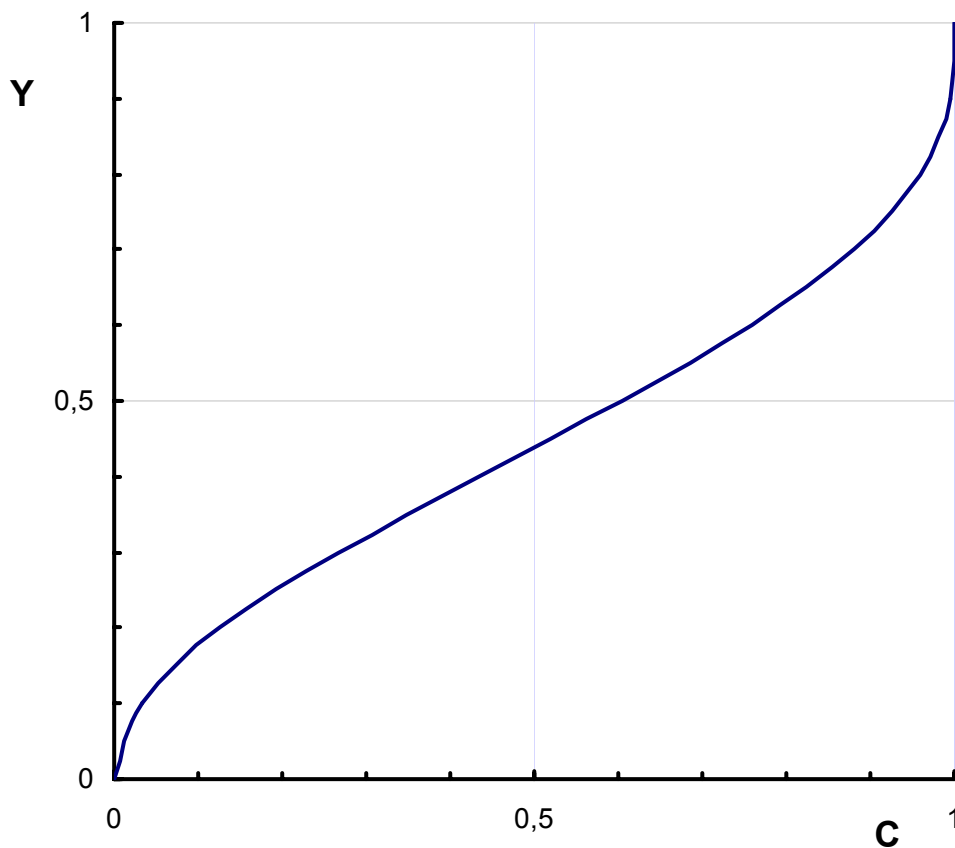


Abbildung 9 Geschwindigkeitsprofil für die Ablösung

Die Geschwindigkeitsverteilung $C(Y)$ des Ablöseprofils der Unterschicht wird mit (M 10) geschrieben.

$$C = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^4 + \frac{2}{5} \left(\frac{Y}{Y_0} \right)^5 \right) \quad (\text{M } 12)$$

Bei Ausdehnung des Profils auf die ganze Grenzschicht schreibt man

$$C = \frac{20}{3} \left(\frac{1}{2} Y^2 - \frac{3}{4} Y^4 + \frac{2}{5} Y^5 \right) \quad (\text{M } 13)$$

Dieses Geschwindigkeitsprofil ist in Abbildung 9 dargestellt. Die Form des Profils bleibt unabhängig von der Reynoldszahl die nach Gleichung (G 7) berechnet wird.

$$Re_{\delta} = 117,80 \cdot \left(\frac{C_{max}}{C_{mittel}} \right)^{7/3} \cdot (C_0')^{4/3}$$

Weiterhin wird vereinfachend mit $(C_{max} / C_{mittel}) = 8/7$ gearbeitet. Dann erhält man

$$Re_{\delta} = 160,86 \cdot (C_0')^{4/3}$$

Zahlenwerte für Re_{δ} sind in die dritte Spalte der folgenden Tabelle eingefügt.

Y_0	C_0'	Re_δ	$Ha_{\text{Ablösung}}$	$\lambda^* = Ha_{\text{Ablösung}} / Re_\delta$
0,01	33,33	$1,73 \cdot 10^4$	-666,7	-0,04
0,05	9,16	$3,1 \cdot 10^3$	-133,3	-0,04
0,1	5,43	$1,54 \cdot 10^3$	-66,7	-0,04
0,15	4,08	$1,05 \cdot 10^3$	-44,4	-0,04

Bemerkenswert bleibt, dass im *laminaren* Gebiet das Ablösen durch eine spezielle Hagenzahl festgelegt ist, die unabhängig von der Reynoldszahl bleibt. Im *turbulenten* Gebiet jedoch bleibt die Ähnlichkeitskennzahl λ^* fast gleich groß, also unabhängig von der Hagenzahl und von der Reynoldszahl. (Vgl. Abbildung 25.10 in [14]) Nach Messungen von Nestler [10] liegt der Wert λ^* für Turbulenz zwischen -0,0045 und -0,0043, mit leicht fallender Tendenz. [14]. Nestler hatte als Bezugslänge die Impulsverlustdicke δ^{**} gewählt; hier wurde mit der Grenzschichtdicke δ gearbeitet. Wenn einheitlich die Werte in der letzten Tabellenspalte mit $\delta^{**} / \delta = 0,1$ multipliziert werden, dann liegt λ^* nahe bei den Werten von Nestler.

10 Literatur

- [1] G. Hagen Handbuch der Wasserbaukunst (Band 1 bis 4 Verlag Bornträger; Band 5 bis 8 Verlag Ernst und Korn)
- [2] H. Blasius Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens (VDI) 1913.
- [3] L. Prandtl Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz (ZAMM 1925)
- [4] L. Prandtl Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung (VDI – Zeitschrift 1933)
- [5] L. Prandtl Bericht über neuere Turbulenzforschung (VDI- Verlag 1926)
- [6] E. Strehle Ebene laminare Wirbelfelder (Maschinenbautechnik (1978)
- [7] G. Schindler Calculating some Details of_Turbulent Motion in Plane Channel Flow ZAMM 74 (1994) 11, 45- 55
- [8] F. Detsch Über die akustische Wirkung von Wirbelfeldern (Wissenschaftliche Zeitschrift TU Dresden 1978)
- [9] J. Stiller Ein numerisches Modell für die Grobstruktur- Simulation turbulenter Strömungen. (Dissertation TU Dresden 1994)
- [10] W. Nestler Inkompressible turbulente Grenzschichten mit maximaler Verzögerung.. MBT 19 (1970)
- [11] W. Albring Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen. (Akademie-Verlag Berlin 1981)
- [12] W. Albring Zur näherungsweisen Berechnung von zeitgemittelten Geschwindigkeitsprofilen turbulenter Grenzschichten. (Bericht I 1533 des Instituts für Strömungsmechanik TU Dresden 1997)

- [13] W. Albring Der turbulente Widerstand einer Kanalströmung kann ohne Abstützen auf Messungen berechnet werden. (Bericht des Instituts für Strömungsmechanik TU Dresden 2004)
- [14] W. Albring Angewandte Strömungslehre (Akademie Verlag Berlin 1978 –1990)
- [15] W. Albring Das Berechnen des turbulenten Hauptgeschwindigkeitsprofils mittels effektiver Zähigkeit (Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden (1992))
- [16] W. Albring Ebene turbulente Dreischichtenprofile für Kanal und Grenzschichtströmungen. (Bericht I 1576 Institut für Strömungsmechanik der TU Dresden 2001)
- [17] W. Albring Ähnlichkeitskennzahlen beim Umschlag und bei Turbulenz. In 50 Jahre Grenzschichtforschung, herausgegeben von H. Görtler und W. Tollmien
- [18] W. Albring Über die Integrationsmöglichkeit der zeitgemittelten Navier-Stokes Gleichung; Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden **44** 1995, Heft 3
- [19] Th. V. Karman Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz (Internationaler Kongress für technische Mechanik Stockholm 1930)
- [20] C. W. Oseen Das Turbulenzproblem (Internationaler Kongress für technische Mechanik, Stockholm 1930)
- [21] L. Hopf Turbulenz bei einem Flusse (Annalen der Physik 1910)
- [22] L. Hopf Zur Theorie der Turbulenz (Annalen der Physik 1919)